Differential Geometry - Dynamical Systems
*** **Monographs** # 8 ***

Dragoş Cioroboiu

The geometry of submanifolds of Sasaki manifolds

[Romanian; Geometria subvarietăţilor în varietăţi Sasaki]

Ph.D. Thesis
University "Politehnica" of Bucharest
2006

Geometry Balkan Press
Bucharest, Romania

The geometry of submanifolds of Sasaki manifolds* Monographs # 8

Differential Geometry - Dynamical Systems * ISSN 1454-511X * Monographs # 8

The geometry of submanifolds of Sasaki manifolds, Dragoş Cioroboiu.
Bucharest. Differential Geometry - Dynamical Systems * Monographs, 2006

Includes bibliographical references.

C U P R I N S

Capitolul 1
Prezentare generală

1 Scurt istoric

Scopul principal al acestei teze este să prezinte punctul nostru de vedere asupra **teoriei subvarietăţilor în varietăţi Sasaki**. Pentru aceasta am pornit de la cercetările efectuate de Bang-yen Chen în teoria subvarietăţilor, la Michigan, începând cu anul 1975 şi de la cercetările efectuate de conducătorul meu de doctorat, Constantin Udrişte, la Bucureşti, începând cu anul 1969. În esenţă, cercetările lui Bang-yen Chen privesc introducerea a două tipuri de invarianţi ai curburii Riemann, numite δ-curburi şi descoperirea unor inegalităţi, pentru fiecare δ-curbură, privită ca o curbură medie a unei imersii izometrice într-un spaţiu euclidian. Aceste rezultate ale lui Bang-yen-Chen au apărut ca răspuns la o problemă pusă de Shiing-shen Chern, privind obstrucţiile Riemann, la imersibilitatea minimală în spaţiile euclidiene. Cercetările lui Constantin Udrişte utilizate de noi privesc structurile aproape de contact, introducerea unor invarianţi intrinseci într-o varietate riemanniană şi aplicarea tehnicilor de programare matematică în geometria diferenţială.

Pentru a evidenţia scopul cercetării noastre vom face o scurtă trecere prin istoria dezvoltării geometriei diferenţiale cu accent asupra teoriei subvarietăţilor.

În geometria riemanniană, având anul de naştere 1854, varietăţile diferenţiabile M^n sunt înzestrate cu metrica riemanniană g, structură geometrică ce imită produsul scalar. Acest tip de geometrie a fost şi este în centrul cercetărilor din matematicile pure şi aplicative.

Teorema de scufundare a lui J. Nash (1954) a arătat că varietăţile riemanniene pot fi realizate ca subvarietăţi în spaţiile euclidiene E^n, cu n suficient de mare.

Problema lui S.S. Chern a fost crucială pentru o mai bună înţelegere a comportamentului subvarietăţilor riemanniene în raport cu tensiunea la care se supune spaţiul ambiant. Răspunsurile la această întrebare, date recent de B.Y. Chen, au relevat importanţa δ-curburilor ca principala caracteristică.

Iniţial, scopul geometriei diferenţiale a suprafeţelor M^2 din E^3 a fost acela de a descrie forma suprafeţelor. În decursul timpului s-a dovedit că această formă este puternic legată de curbura medie şi de curbura Gauss.

În timp ce invarianţii lui C. Udrişte şi δ-curburile lui B.Y. Chen oferă o descriere intrinsecă a oricărei varietăţi riemanniene (M^n, g), inegalităţile lui Chen demonstrează impactul puternic asupra formelor posibile care pot fi asumate ca subvarietăţi în geometria lor extrinsecă.

J.A. Schouten şi D. van Dantzing au încercat prima oară transferarea rezultatelor din spaţiile cu metrică riemanniană şi conexiune afină în cea a spaţiilor cu structură complexă, un principiu al anilor '30. Apare noţiunea de spaţiu hermitian [71] cu conexiune liniară şi simetrică. Independent de aceştia, în 1933, E. Kaehler [48] consideră un spaţiu cu aceeaşi conexiune, care astăzi este denumit spaţiu Kaehler. Şi alţi matematicieni, ca de exemplu S. Bochner, H. Guggenheimer, A. Lichnerowicz, au studiat în profunzime astfel de spaţii.

În 1947, A. Weil [92] semnala că pe o varietate complexă există un câmp tensorial J de tipul (1,1), ce satisface ecuaţia $J^2 = -Id$. În acelaşi an, C. Ehresmann defineşte *varietatea aproape complexă* ca o varietate diferenţiabilă de dimensiune pară, dotată cu un tensor mixt J, cu pătratul egal cu minus identitatea. O asemenea varietate a fost denumită ulterior *varietate aproape hermitiană* deoarece admite o metrică Riemann, compatibilă cu tensorul J.

Teoria varietăţilor complexe şi aproape complexe a devenit una din cele mai importante ramuri ale geometriei diferenţiale moderne prin neobosita cercetare a unor matematicieni importanţi ca Bochner, Boothby, Calabi, Chern, Goldberg, Hodge, Ishihara, Kobayashi, Lichnerowicz, Matshushima, Nomizu, Sasaki şi Yano.

Pe de altă parte, geometria varietăţilor de contact urmează un drum paralel. O varietate diferenţiabilă de dimensiune $2k+1$ se numeşte *varietate de contact*, dacă pe ea există o 1-formă diferenţiabilă η astfel încât $\eta \wedge (d\eta)^k \neq 0$. Studiul acestui tip de varietăţi a fost iniţiat de S.S. Chern [23], W.M. Boothby şi H.C. Wang [5]. Chern arată că o structură de contact admite o reducere a grupului de structură al fibratului tangent la $U(n) \times 1$, iar J. Gray [39] numeşte această varietate ca *varietate aproape de contact*. Bouzon studiază, în 1964, această structură pe $\mathbf{R}^{2m+1}$ şi o numeşte *structură aproape cocomplexă*.

În 1960, studiul varietăţilor aproape de contact cunoaşte un nou şi definitiv impuls datorită lui S. Sasaki [68]. El studiază structura aproape de contact prin tripletul (ϕ, ξ, η), unde ϕ e un tensor de tipul (1,1), ξ un câmp vectorial şi

η o 1-formă, astfel încât

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \qquad \eta(\xi) = 1.$$

Pe lângă aceasta, este posibilă definirea pe această varietate aproape de contact a unei metrici compatibile cu structura, apărând conceptul de *varietate metrică aproape de contact*.

În 1962, Sasaki şi Hatakeyama au studiat tensorul Nijenhuis al lui ϕ şi proprietăţile varietăţilor aproape de contact atunci când ξ este câmp Killing [69], [70]. Acest fapt a permis descrierea [40] structurii de contact normale şi a structurii Sasaki. O multitudine de autori şi-au canalizat eforturile în acest domeniu, geometria de contact căpătând noi dimensiuni, mai ales datorită lui D.E. Blair [2], S. Ianuş [41], V. Oproiu [58], C. Udrişte [87].

Un alt aspect deosebit de interesant al teoriei subvarietăţilor a varietăţilor complexe şi de contact, îl constituie comportamentul spaţiului tangent în raport cu structura corespondentă.

În geometria complexă, există două clase importante de subvarietăţi: subvarietăţile complexe şi subvarietăţile total reale. O subvarietate M a unei varietăţi aproape hermitiene $(\widetilde{M}, g, J)$ se numeşte *subvarietate complexă* dacă

$$J(T_pM) \subseteq T_pM,$$

pentru toate punctele $p \in M$, adică M este subvarietate complexă a lui $\widetilde{M}$ dacă şi numai dacă, pentru orice punct p, unghiul dintre JX şi T_pM este egal cu zero.

Studiul subvarietăţilor complexe ale unei varietăţi Kaehler, din punctul de vedere al geometriei diferenţiale, a fost iniţiat de către E. Calabi şi alţi matematicieni în prima decadă a anilor '50 [10], [11].

Subvarietăţile total reale [95] sunt caracterizate de condiţia

$$J(T_pM) \subseteq T_p^{\perp}M,$$

pentru toate punctele $p \in M$. Cu alte cuvinte, pentru orice vector nenul $X \in T_pM$, unghiul dintre JX şi T_pM este egal cu $\dfrac{\pi}{2}$, independent de alegerea lui p.

Conceptele analoge în geometria varietăţilor aproape de contact sunt subvarietăţile invariante şi respectiv anti-invariante.

Subvarietatea M a unei varietăţi metrice aproape de contact $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ este *invariantă* dacă

$$\phi(T_pM) \subseteq T_pM,$$

pentru toate punctele $p \in M$, şi *anti-invariantă* dacă

$$\phi(T_pM) \subseteq T_p^{\perp}M,$$

independent de alegerea punctului p al subvarietăţii.

Pentru subvarietăţi invariante (respectiv anti-invariante), unghiul dintre ϕX şi T_pM este egal cu 0 (respectiv $\frac{\pi}{2}$), pentru toţi vectorii $X \in T_pM$ şi toate punctele $p \in M$.

Subvarietăţile invariante au fost studiate de M. Okumura [56], K.Yano şi S. Ishihara [94]. În ceea ce priveşte subvarietăţile anti-invariante, se detaşează studiile lui Yano şi Kon [95].

În 1990, B.Y. Chen prezenta o nouă clasă importantă de subvarietăţi în varietăţi aproape hermitiene: *subvarietăţile oblice*. În [13], Chen defineşte *subvarietatea oblică* ca o subvarietate M a unei varietăţi aproape hermitiene, care are unghiul dintre JX şi spaţiul tangent T_pM constant, independent de alegerea punctului p şi a vectorului nenul $X \in T_pM$. Acest unghi se defineşte ca fiind *unghiul de oblicitate*. Subvarietăţile complexe şi total reale sunt cazuri particulare de subvarietăţi oblice. Subvarietatea oblică se numeşte *proprie* când nu este nici complexă, nici total reală, adică unghiul de oblicitate se află situat în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Noţiunea de *unghi de oblicitate* a apărut ca o extindere a unghiului Käehler, acest concept fiind introdus şi studiat de S.S. Chern şi J.G. Wolfson [24], ca fiind unghiul dintre $J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ şi $\frac{\partial}{\partial y}$, unde $z = x + \sqrt{-1}y$ este un sistem local de coordonate complex pe o suprafaţă. În [4] şi [6] apar exemple de imersii oblice ale sferei $\mathbf{S}^2$ într-un spaţiu proiectiv complex $\mathbf{CP}^n$. Mai târziu [35], [55] s-au studiat suprafeţele minimale cu unghi Käehler constant.

Exploatând conceptul de *imersie oblică,* Chen [13] găseşte proprietăţi fundamentale ale imersiilor şi obţine diverse rezultate pe $\mathbf{C}^2$. În [20] şi [21], B.Y. Chen şi Y. Tazawa studiază suprafeţele oblice de codimensiune 2 şi imersiile oblice ale spaţiilor euclidiene complexe.

Pe de altă parte [19], B.Y. Chen şi J.M. Morvan au studiat proprietăţile unghiului privind cohomologia subvarietăţilor oblice. Lucrarea [12] constituie un compendiu privind studiul subvarietăţilor total reale ale unei varietăţi Kaehler.

Mai târziu, T. Ikawa [47] calculează lungimea formei a doua fundamentale pentru suprafeţe oblice, în timp ce S. Maeda, Y. Ohnita şi S. Udagawa [49] studiază subvarietăţile oblice din $\mathbf{CP}^n$. În [73] şi [74], Tazawa construieşte imersiile oblice în $\mathbf{C}^n$, iar Chen [15] stabileşte obstrucţiile pentru existenţa subvarietăţilor oblice, folosind nişte invarianţi geometrici adecvaţi. Recent Yang [93] a studiat suprafeţele oblice cu curbura medie constantă din $\mathbf{C}^2$.

De curând, Chen şi L. Vrancken [22] au demonstrat o importantă teoremă de unicitate şi existenţă pentru imersiile oblice ale unui spaţiu cu curbura holomorfică constantă. Acest fapt permite determinarea unui număr mare de imersii oblice, primele exemple apreciate fiind cele în spaţiul hiperbolic $\mathbf{CH}^2(-4)$.

Nu în ultimul rând, trebuie menţionată cercetarea subvarietăţile oblice şi semioblice pe cazul Sasaki datorată şcolii spaniole reprezentată de J.L. Cabrerizo, A. Carriazo şi L.M. Fernandez [8], [9].

Şcoala românească de geometrie este prezentă în cercetări de tipul precedent printr-un grup remarcabil de profesori. În Iaşi R. Miron, V. Oproiu şi M. Anastasiei [51], [52], [53], [54], [58], [57] au dat o noua viziune a studiului diverselor tipuri de varietăţi, iar A. Bejancu şi N. Papaghiuc [61], [59], [60], [1], [62], [64], [64] au studiat subvarietăţile semi-oblice şi CR-subvarietăţile de contact pe varietăţi Sasaki, dând noi impulsuri studiului diverselor tipuri de varietăţi. În Braşov, G. Pitis [66], [65] s-a axat pe probleme similare, dar şi pe probleme specifice, cum ar fi studiul subvarietăţilor integrale în varietăţi Sasaki. În Bucureşti, S. Ianuş [42], [45], [43] a studiat varietăţile Cauchy-Riemann, aplicaţiile armonice şi implicaţiile lor în teoria relativităţii cu accent pe varietăţi înzestrate cu structuri geometrice de tip Sasaki, I. Mihai [50], [44] a dezvoltat ramura subvarietăţilor riemanniene prin prisma inegalităţilor lui Chen cu accent pe găsirea de relaţii între diverşi invarianţi intrinseci şi extrinseci, iar C. Udrişte a introdus şi a studiat varietăţile metrice aproape cocuaternionice [75], [77].

Deşi inegalităţile geometrice pot fi incluse în programarea matematică, din punct de vedere istoric există puţine contacte între ideile cercetătorilor din geometrie şi cei din optimizări. Cei care lucrează în inegalităţi geometrice par a fi motivaţi doar de tradiţia geometriei diferenţiale, iar cei care se ocupă de programarea matematică par a fi influenţaţi doar de probleme economice sau de management. Există totuşi excepţii notabile. Între aceştia, conducătorul meu de doctorat, Prof. Dr. C. Udrişte, care a elaborat lucrări şi cărţi de tehnici de optimizare pe varietăţi riemanniene [88], [85], [87], [80], [90], arătând că programarea matematică face casă bună cu geometria diferenţială. Continuând ideile conducătorului meu de doctorat, în capitolul 7, ”Extreme cu legături pe forme spaţiale Sasaki”, aplicăm tehnicile programării matematice pentru a obţine inegalităţi geometrice.

2 Prezentarea tezei

Tema tezei noastre de doctorat este "Geometria Subvarietăţilor în Varietăţi Sasaki", oferind câteva relaţii remarcabile pentru subvarietăţi oblice, 2-oblice şi semi-oblice în forme spaţiale Sasaki. Acest domeniu de cercetare, iniţiat de B.Y. Chen [14], mi-a oferit unele probleme deschise pe care le-am rezolvat în perioada 1998 şi până în prezent.

Teza este structurată în şapte capitole.

Capitolul 1 este un rezumat al tezei.

Capitolul 2 are caracter introductiv. În el expunem noţiunile fundamentale, indispensabile parcurgerii tezei: principalele proprietăţi ale varietăţilor Sasaki şi a subvarietăţilor acestora, definiţii, exemple şi câteva proprietăţi pentru structuri aproape de contact, structuri complexe şi structuri de K-contact, subvarietăţi oblice, 2-oblice şi semi-oblice.

Capitolele 3-7 conţin rezultate originale, unele fiind deja publicate sau trimise spre publicare în reviste de specialitate din ţară şi străinătate. Aici selectăm şi prezentăm fară demonstraţie, câteva din aceste rezultate originale.

În capitolul 3, **Optimizări pe subvarietăţi oblice**, demonstrăm anumite relaţii cu privire la operatorul Weingarten A_H, curbura secţională, curbura scalară şi curbura Ricci, pentru subvarietăţi oblice în forme spaţiale Sasaki, considerând secţiuni plane π ortogonale la ξ. Dintre acestea cităm:

Teoremă. [33] *Fie M o subvarietate θ-oblică $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ de dimensiune $(2m+1)$, fie H curbura medie şi δ_M primul invariant Chen. Atunci:*

$$\delta_M \leq \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} + \frac{(c-1)}{8}[3(n-3)\cos^2\theta - 2(n-1)]. \tag{1}$$

Cazul de egalitate al inegalităţii (1) are loc într-un punct $p \in M$ dacă şi numai dacă există o bază ortonormată $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ din T_pM şi o bază ortonormată $\{e_{n+1}, ..., e_{2m}, e_{2m+1}\}$ din $T_p^{\perp}M$ astfel încât operatorii Weingarten ai lui M în $\widetilde{M}(c)$ în p să aibă următoarea formă:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \mu I_{n-2} & \end{pmatrix}, \quad a+b=\mu,$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 & \cdots & 0 \\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & O_{n-2} & \end{pmatrix}, \qquad r \in \{n+2, ..., 2m+1\}.$$

Pentru cazurile particulare de $\theta-$subvarietăţi oblice, avem

Corolar. [33] *Fie M o subvarietate invariantă $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ şi δ_M primul invariant Chen. Atunci,*

$$\delta_M \leq \frac{(c+3)(n-2)(n+1)}{8} + \frac{(c-1)(n-7)}{8}.$$

Corolar. [33] *Fie M o subvarietate anti-invariantă n-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ şi δ_M primul invariant Chen. Atunci,*

$$\delta_M \leq \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} - \frac{(c-1)(n-1)}{4}.$$

În continuare, dăm o generalizare a teoremei de mai sus, în termenii invarianţilor Chen $\delta(n_1, ..., n_k)$.

Teoremă. [33] *Fie M o subvarietate θ-oblică $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ de dimensiune $(2m+1)$, $L_1, ..., L_k$ subspaţiile mutual ortogonale ale lui T_pM cu $\dim L_j = n_j$, $j = 1, ..., k$, H curbura medie, $\delta(n_1, ..., n_k)$ al doilea invariant Chen iar*

$$d(n_1, ..., n_k) = \frac{n^2\left(n + k - 1 - \sum_{j=1}^{k} n_j\right)}{2\left(n + k - \sum_{j=1}^{k} n_j\right)}$$

şi

$$b(n_1, ..., n_k) = \frac{1}{2}\left[n(n-1) - \sum_{j=1}^{k} n_j(n_j - 1)\right].$$

Atunci,

$$\delta(n_1, ..., n_k) \leq d(n_1, ..., n_k)\|H\|^2 + b(n_1, ..., n_k)\frac{c+3}{8} + \frac{c-1}{8}\left\{3(n-1)\cos^2\theta - 3\sum_{j=1}^{k} n_j \cos^2\theta\right\}.$$

Corolar. [33] *Fie M o subvarietate invariantă $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ şi $\delta(n_1, ..., n_k)$ al doilea invariant Chen. Atunci,*

$$\delta(n_1, ..., n_k) \leq b(n_1, ..., n_k)\frac{c+3}{8} + \frac{c-1}{8}\left\{3(n-1) - 3\sum_{j=1}^{k} n_j\right\}.$$

Corolar. [33] *Fie M o subvarietate anti-invariantă $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ şi $\delta(n_1, ..., n_k)$ al doilea invariant Chen. Atunci,*

$$\delta(n_1, ..., n_k) \leq d(n_1, ..., n_k) \|H\|^2 + b(n_1, ..., n_k)\frac{c+3}{8},$$

unde $n_j = 2m_j + \varphi_j$, $\varphi_j \in \{0, 1\}$, $\forall j \in \{1, ..., k\}$.

Inegalităţi remarcabile pentru subvarietăţi 2-oblice

Teoremă. [29] *Fie M o subvarietate 2-oblică $(n = 2d_1+2d_2+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ de dimensiune $(2m+1)$, fie H curbura medie, fie τ curbura scalară şi fie $K(\pi)$ curbura secţională. Atunci,*

$$\begin{aligned}(2) \qquad \min_{\pi} K(\pi) \;=\; &\tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\}\\ &-\frac{(c-1)}{4}[3(d_1-1)\cos^2\theta_1 + 3d_2\cos^2\theta_2 - (n-1)]\end{aligned}$$

pe $\mathcal{D}_1$ şi

$$\begin{aligned}(2') \qquad \min_{\pi} K(\pi) \;=\; &\tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\}\\ &-\frac{(c-1)}{4}[3d_1\cos^2\theta_1 + 3(d_2-1)\cos^2\theta_2 - (n-1)]\end{aligned}$$

pe $\mathcal{D}_2$.

Cazul de egalitate pentru (2) şi (2′) are loc într-un punct $p \in M$ dacă şi numai dacă există o bază ortonormată $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ din T_pM şi o bază ortonormată $\{e_{n+1}, ..., e_{2m}, e_{2m+1}\}$ din $T_p^{\perp}M$ astfel încât operatorii Weingarten ai lui M din $\widetilde{M}(c)$ în p să aibă următoarea formă:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \mu I_{n-2} & \end{pmatrix}, \qquad a+b=\mu,$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h^r_{11} & h^r_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ h^r_{12} & -h^r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & O_{n-2} & \end{pmatrix}, \qquad r \in \{n+2, ..., 2m+1\}.$$

Corolar. [29] *Fie M o CR-subvarietate de contact n-dimensională ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$) a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ şi fie $K(\pi)$ curbura secţională. Atunci,*

$$\min_\pi K(\pi) = \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} - \frac{(c-1)}{4}[3d_1 - (n+2)],$$

pe $\mathcal{D}_1$ şi

$$\min_\pi K(\pi) = \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} - \frac{(c-1)}{4}[3d_1 - (n-1)],$$

pe $\mathcal{D}_2$.

Observaţie. În particular, dacă $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, se obţine cazul pentru subvarietate oblică, tratat în prima teoremă.

Corolar. [29] *Fie M o subvarietate invariantă ($n = 2k+1$)-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ şi fie δ_M primul invariant Chen. Atunci,*

$$\delta_M \leq \frac{(c+3)(n-2)(n+1)}{8} + \frac{(c-1)(n-7)}{8}.$$

Corolar. [29] *Fie M o subvarietate anti-invariantă n-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ şi fie δ_M primul invariant Chen. Atunci,*

$$\delta_M \leq \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} - \frac{(c-1)(n-1)}{4}.$$

Inegalităţi remarcabile pentru subvarietăţi semioblice

Teoremă. [31] *Fie M o subvarietate semioblică ($n = 2d_1 + 2d_2 + 1$) dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$, fie H curbura medie, fie τ curbura scalară şi fie $K(\pi)$ curbura secţională. Atunci,*

$$(3) \qquad \min_\pi K(\pi) = \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\}$$
$$- \frac{(c-1)}{4}[3d_2\cos^2\theta + 3(d_1-1) - (n-1)],$$

pe $\mathcal{D}_1$ *şi*

$$(3') \qquad \min_{\pi} K(\pi) = \tau - \frac{n-2}{2}\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\} - \frac{(c-1)}{4}[3(d_2-1)\cos^2\theta + 3d_1 - (n-1)].$$

pe $\mathcal{D}_2$.

Cazul de egalitate al inegalităţilor (3) *şi* (3′) *are loc într-un punct* $p \in M$ *dacă şi numai dacă există o bază ortonormată* $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ *din* T_pM *şi o bază ortonormată* $\{e_{n+1}, ..., e_{2m}, e_{2m+1}\}$ *din* $T_p^{\perp}M$ *astfel încât operatorii Weingarten ai lui* M *din* $\widetilde{M}(c)$ *în* p *au următoarea formă:*

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \mu I_{n-2} & \end{pmatrix}, \qquad a + b = \mu,$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h^r_{11} & h^r_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ h^r_{12} & -h^r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & O_{n-2} & \end{pmatrix}, \qquad r \in \{n+2, ..., 2m+1\}.$$

Corolar. [31] *Fie* M *o CR subvarietate de contact n-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki* $\widetilde{M}(c)$. *Atunci, avem:*

$$\min_{\pi} K(\pi) = \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} - \frac{(c-1)}{4}[3(d_1+d_2) - (n+2)].$$

Corolar. [31] *Fie* M *o subvarietate invariantă* $(n = 2k+1)$*-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki* $\widetilde{M}(c)$. *Atunci,*

$$\delta_M \leq \frac{(c+3)(n-2)(n+1)}{8} + \frac{(c-1)(n-7)}{8}.$$

Corolar. [31] *Fie* M *o subvarietate anti-invariantă n-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki* $\widetilde{M}(c)$. *Atunci,*

$$\delta_M \leq \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} - \frac{(c-1)(n-1)}{4}.$$

În capitolul 4, **Extreme ale curburii Ricci pe subvarietăţi oblice**, găsim relaţii între curbura Ricci şi pătratul curburii medie pentru subvarietăţi oblice, 2-oblice şi semi-oblice din forme spaţiale Sasaki, unde subvarietatea M

este tangentă câmpului vectorial de structură ξ. Pentru confirmare, reproducem unele teoreme.

Teoremă. [32] *Fie M o subvarietate θ-oblică, $(n = 2k+1)$-dimensională tangentă la ξ, a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ de dimensiune $(2m+1)$, fie H curbura medie şi* $\mathrm{Ric}(X)$ *curbura Ricci. Atunci,*

(i) *pentru fiecare vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ, avem*

$$\mathrm{Ric}(X) \leq \frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3) + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 2)(c-1) + n^2\|H\|^2\right\}. \tag{4}$$

(ii) *dacă $H(p) = 0$, atunci un vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ satisface cazul de egalitate în* (4) *dacă şi numai dacă $X \in \mathcal{N}_p$.*

(iii) *cazul de egalitate în* (4) *are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonali la ξ în p dacă şi numai dacă p este un punct total geodezic.*

Teoremă. [32] *Fie M o subvarietate 2-oblică, $(n = 2d_1+2d_2+1)$-dimensională, tangentă la ξ a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$. Atunci cu notaţiile din teorema precedentă, avem,*

(i) *pentru fiecare vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ şi*

a) *X este tangent la $\mathcal{D}_1$ avem*

$$\mathrm{Ric}(X) \leq \frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3) + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta_1 - 2)(c-1) + n^2\|H\|^2\right\} \tag{5}$$

respectiv

b) *dacă X este tangent la $\mathcal{D}_2$ avem*

$$\mathrm{Ric}(X) \leq \frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3) + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta_2 - 2)(c-1) + n^2\|H\|^2\right\}. \tag{5'}$$

(ii) *dacă $H(p) = 0$, atunci un vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ satisface cazul de egalitate în* (5) *sau* (5′) *dacă şi numai dacă $X \in \mathcal{N}_p$.*

(iii) *cazul de egalitate din* (5) *şi* (5′) *are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonali la ξ în p dacă şi numai dacă p este un punct total geodezic.*

Teoremă. [32] *Fie M o subvarietate semioblică $(n = 2d_1+2d_2+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$. Atunci, cu notaţiile de mai sus, avem*

(i) *pentru fiecare vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ şi*

a) *dacă X este tangent la $\mathcal{D}_1$*

$$\mathrm{Ric}(X) \leq \frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3) - (c-1) + n^2\|H\|^2\right\}, \tag{6}$$

respectiv

b) *X este tangent la $\mathcal{D}_2$*

$$\text{Ric}(X) \leq \frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3) + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 2)(c-1) + n^2\|H\|^2\right\}. \tag{6'}$$

(ii) *dacă $H(p) = 0$, atunci un vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ satisface cazul de egalitate în (6) sau (6′) dacă şi numai dacă $X \in \mathcal{N}_p$.*

(iii) *cazul de egalitate din (6) şi (6′) are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonali la ξ în p dacă şi numai dacă p este un punct total geodezic.*

În particular, are loc:

Corolar. [32] *Fie M o subvarietate invariantă $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$. Atunci,*

(i) *pentru fiecare vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ, avem*

$$\text{Ric}(X) \leq \frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3) + \frac{1}{2}(c-1)\right\}. \tag{7}$$

(ii) *un vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ satisface cazul de egalitate în (7) dacă şi numai dacă $X \in \mathcal{N}_p$.*

(iii) *cazul de egalitate în (7) are loc pentru toţi vectorii unitar tangenţi ortogonali la ξ în p dacă şi numai dacă p este un punct total geodezic.*

Corolar. [32] *Fie M o subvarietate anti-invariantă $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ Atunci,*

(i) *pentru fiecare vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ, avem*

$$\text{Ric}(X) \leq \frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3) - (c-1) + n^2\|H\|^2\right\}. \tag{8}$$

(ii) *dacă $H(p) = 0$, atunci un vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ satisface cazul de egalitate în (8) dacă şi numai dacă $X \in \mathcal{N}_p$.*

(iii) *cazul de egalitate în (8) are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonali la ξ în p dacă şi numai dacă p este un punct total geodezic.*

În continuare, stabilim relaţii între k-curbura Ricci şi pătratul curburii medii pentru subvarietăţi tangente la ξ.

Teoremă. [32] *Fie M o subvarietate θ-oblică $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$, fie H curbura medie şi τ curbura scalară. Atunci avem,*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2\tau}{n(n-1)} - \frac{c+3}{4} - \frac{[3(n-1)\cos^2\theta - 2n + 2](c-1)}{4n(n-1)}.$$

Teoremă. [32] *Fie M o subvarietate 2-oblică $(n = 2d_1+2d_2+1)-$dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$, fie H curbura medie şi τ curbura scalară. Atunci,*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2\tau}{n(n-1)} - \frac{c+3}{4} - \frac{[3(d_1 \cos^2\theta_1 + d_2 \cos^2\theta_2) - n + 1](c-1)}{2n(n-1)}.$$

Teoremă. [32] *Fie M o subvarietate semioblică $(n = 2d_1 + 2d_2 + 1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$, fie H curbura medie şi τ curbura scalară. Atunci,*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2\tau}{n(n-1)} - \frac{c+3}{4} - \frac{[3(d_1 + d_2 \cos^2\theta) - n + 1](c-1)}{2n(n-1)}.$$

Teoremă. [32] *Fie M o subvarietate θ-oblică $(n = 2t + 1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$, fie H curbura medie şi Θ_k invariantul Chen. Atunci, pentru orice întreg k fixat, $2 \leq k \leq n$, şi orice punct $p \in M$, avem*

$$\|H\|^2(p) \geq \Theta_k(p) - \frac{c+3}{4} - \frac{[3(n-1)\cos^2\theta - 2n + 2](c-1)}{4n(n-1)}.$$

Teoremă. [32] *Fie M o subvarietate 2-oblică $(n = 2d_1+2d_2+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$, fie H curbura medie şi $\Theta_k(p) = \frac{1}{k-1}\inf_{L,X} \mathrm{Ric}_L(X)$ invariantul Chen. Atunci, pentru orice întreg k, $2 \leq k \leq n$, şi orice punct $p \in M$, avem*

$$\|H\|^2(p) \geq \Theta_k(p) - \frac{c+3}{4} - \frac{[3(d_1 \cos^2\theta_1 + d_2 \cos^2\theta_2) - n + 1](c-1)}{2n(n-1)}.$$

Teoremă. [32] *Fie M o subvarietate semioblică $(n = 2d_1+2d_2+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$. Atunci, pentru orice întreg k, $2 \leq k \leq n$, şi orice punct $p \in M$, avem*

$$\|H\|^2(p) \geq \Theta_k(p) - \frac{c+3}{4} - \frac{[3(d_1 + d_2 \cos^2\theta) - n + 1](c-1)}{2n(n-1)}.$$

Corolar. [32] *Fie M o subvarietate invariantă n-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$. Atunci, pentru orice întregi k, $2 \leq k \leq n$, şi orice punct $p \in M$, avem*

$$\Theta_k(p) \leq \frac{c+3}{4} + \frac{c-1}{4n}.$$

Corolar. [32] *Fie M o subvarietate anti-invariantă n-dimensională, a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$. Atunci, pentru orice întreg k, $2 \leq k \leq n$, şi orice punct $p \in M$, avem*

$$\|H\|^2(p) \geq \Theta_k(p) - \frac{c+3}{4} + \frac{c-1}{2n}.$$

Corolar. [32] *Fie M o CR subvarietate de contact n-dimensională, ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$) a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$. Atunci, pentru orice întreg k, $2 \leq k \leq n$, şi orice punct $p \in M$, avem*

$$\|H\|^2(p) \geq \Theta_k(p) - \frac{c+3}{4} - \frac{(3d_1 - n + 1)(c-1)}{2n(n-1)}.$$

unde $2d_1 = \dim \mathcal{D}_1$.

În capitolul 5, **Inegalităţi produse de operatorul Weingarten A_H pe subvarietăţi C-total reale în forme spaţiale Sasaki**, stabilim o relaţie optimă între curbura secţională $K(\pi)$ şi operatorul Weingarten A_H pentru subvarietăţi C-total reale M din forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ având curbura secţională constantă c, unde subvarietatea M este tangentă la câmpul vectorial de structură ξ.

Teoremă. [30] *Fie $x : M \to \widetilde{M}(c)$ o imersie izometrică a unei subvarietăţi C-total reale $n-$dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ de dimensiune $(2m+1)$ cu curbura ϕ secţională constantă c. Dacă există un punct $p \in M$ şi un număr $b > \dfrac{1}{4}(c+3)$ astfel încât $K(\pi) \geq b$ în p, atunci diferenţa*

$$A_H - \frac{n-1}{n}[b - \frac{1}{4}(c+3)] \cdot I_n \text{ în } p,$$

este pozitiv definită unde I_n este aplicaţia identică.

B.Y. Chen stabileşte o relaţie între k-curbura Ricci şi operatorul Weingarten pentru o subvarietate de codimensiune arbitrară. Vom prezenta şi demonstra inegalitatea similară pentru o subvarietate C-total reală a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$.

Teoremă. [30] *Fie $x : M \to \widetilde{M}(c)$ o imersie izometrică a unei subvarietăţi C-total reale, $n-$dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}\ (c)$ cu curbura ϕ secţională constantă c, iar $\Theta_k(p) = \frac{1}{k-1} \inf_{L,X} \mathrm{Ric}_L(X)$ un invariant Chen. Atunci pentru orice întreg k, $2 \leq k \leq n$, şi orice punct $p \in M$, avem*

i) *dacă* $\Theta_k(p) \neq \frac{1}{4}(c+3)$, *diferenţa*

$$A_H - \frac{n-1}{n}\left[\Theta_k(p) - \frac{1}{4}(c+3)\right] \cdot I_n \text{ în } p$$

este pozitiv definită.

ii) *dacă* $\Theta_k(p) = \frac{1}{4}(c+3)$, *atunci* $A_H \geq 0$ *în* p.

iii) *un vector unitar* $X \in T_pM$ *satisface*

$$A_H X = \frac{n-1}{n}\left[\Theta_k(p) - \frac{1}{4}(c+3)\right] X$$

dacă şi numai dacă $\Theta_k(p) = \frac{1}{4}(c+3)$ *şi* $X \in N(p)$.

iv) $A_H = \frac{n-1}{n}\left[\Theta_k(p) - \frac{1}{4}(c+3)\right] \cdot I_n$ *în* p *dacă şi numai dacă* p *este un punct total geodezic.*

În capitolul 6, **Curbura scalară pentru subvarietăţi C-total reale în forme spaţiale Sasaki**, prezentăm câteva rezultate originale cu privire la curbura scalară a unei subvarietăţi C-total reale de dimensiune maximală a unei forme spaţiale Sasaki cu ajutorul funcţiilor eliptice Jacobi.

Teoremă. [27] *Dacă* M^n *este o subvarietate* C*-total reală a unei forme spaţiale Sasaki* $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$, *atunci curbura medie* H *şi curbura scalară* τ *din* M *satisfac*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(n+2)}{n^2(n-1)}\tau - \left(\frac{n+2}{n}\right)\left(\frac{c+3}{4}\right).$$

Mai mult, egalitatea are loc dacă şi numai dacă există un reper ortonormat adaptat $\{e_1, ..., e_n, e_{1*}, ..., e_{n*}, e_{2n+1}\}$ *cu* e_{1*} *paralel la* H, *astfel încât forma a doua fundamentală pentru* M^n *din* $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$ *are următoarea formă*

$$\begin{array}{lll} h(e_1,e_1) = 3\lambda e_{1*}, & h(e_2,e_2) = ... = h(e_n,e_n) = \lambda e_{1*}, & \\ h(e_1,e_j) = \lambda e_{j*}, & h(e_j,e_k) = 0, & 2 \leq j \neq k \leq n, \\ h(e_i,\xi) = e_{i*}, & h(e_{i*},\xi) = -e_i. & \end{array}$$

cu $\lambda \in C^\infty(M)$.

Teoremă. [27] *Fie* $i : M^n \longrightarrow S^{2n+1}$ *o imersie izometrică* C*-total reală satisfăcând cazul de egalitate*

$$\|H\|^2 = \frac{2(n+2)}{n^2(n-1)}\tau - \frac{n+2}{n}.$$

Atunci M este subvarietate total geodezică şi în acest caz M este local izometrică cu spaţiul proiectiv real $\mathbf{R}P^n(1)$ sau mulţimea U de puncte non-total geodezice din M este o submulţime densă din M. U este o mulţime deschisă din P_a^n, $a > 1$, modulo izometrie din S^{2n+1}, iar imersia i este dată de p_a.

Găsim ecuaţia

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + 2\lambda^3 + \lambda = 0.$$

Utilizând un rezultat din [16], soluţia ecuaţiei de mai sus este

$$\lambda = \frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}} cn\left(ax+b, \frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}\right),$$

unde a, b sunt constante cu $a > 1$, iar $cn(u,k)$ este funcţia Jacobi definită ca $cn(u) = \sqrt{1 - sn^2(u)}$, unde $sn(u)$ este funcţia eliptică Jacobi.

În capitolul 7, **Extreme cu legături pe forme spaţiale Sasaki**, aplicăm tehnici de programare neliniară cu restricţii pentru a obţine extremele formei pătratice de curbură pe forme spaţiale Sasaki sau pe subvarietăţi ale formelor spaţiale Sasaki. Implicit obţinem valorile proprii şi vectorii proprii ai aplicaţiei liniare de curbură. Rezultatele originale obţinute se pot concentra în cele două teoreme enunţate mai jos.

Teoremă. 1) *Operatorul de curbură al unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$ are valorile proprii reale $\lambda = 1$ pentru vectorii proprii $X_a \wedge X_b$, $X_a \wedge \xi$, $X_{\overline{a}} \wedge X_{\overline{b}}$ (valoare proprie multiplă de ordinul m^2) şi $\lambda = \dfrac{c+1}{2}$ pentru $X_{\overline{a}} \wedge X_b$, $X_{\overline{a}} \wedge \xi$ (valoare proprie multiplă de ordinul $\dfrac{m^2+m}{2}$).*

2) *Extremele formelor pătratice de curbură $\widetilde{R}(X_A, X_B, X_A, X_B)$ sunt: $\lambda_{\min} = \dfrac{c+1}{2}$, $\lambda_{\max} = 1$ pentru $c < 1$ şi $\lambda_{\min} = 1$, $\lambda_{\max} = \dfrac{c+1}{2}$ pentru $c \geq 1$.*

3) *Marginile curburii scalare sunt $m^2 (2m+1)^2$ şi $\dfrac{c+1}{4}(m^2+m)(2m+1)^2$.*

Teoremă. *Extremele formelor pătratice de curbură $R_{ABCD}\Pi_{ij}^{AB}\Pi_{ij}^{CD}$ ale unei subvarietăţi oblice n-dimensionale într-o formă spaţială Sasaki $(2m+1)$-dimensională, condiţionate de repere ortonormate, sunt respectiv cea mai mică şi cea mai mare dintre valorile proprii ale operatorului liniar de curbură asociat. Precizarea acestor valori extreme depinde de relaţia de ordine dintre a, b şi $a + b = \mu$.*

Pe parcursul realizării acestei teze de doctorat am fost îndrumat de o seamă de personalităţi care m-au ajutat să finalizez această lucrare.

În primul rând, conducătorul tezei, domnul profesor doctor Constantin Udrişte, care timp de 5 ani a crezut şi sperat în mine, călăuzindu-mi drumul spre adevărata ştiinţă. Domnul profesor doctor Ion Mihai mi-a dat tot sprijinul în formarea şi sedimentarea ideilor care mi-au permis conceperea tezei. Domnul profesor doctor Mihai Postolache a fost tot timpul alături de mine, prin inestimabilul ajutor şi colaborare în etapele incipiente de formare a subsemnatului. Domnul profesor doctor Stere Ianuş mi-a acordat un important sprijin, prin observaţiile pertinente privind structurarea tezei. Domnul profesor doctor Gheorghe Pitiş a supervizat materialul într-o formă incipientă. Domnul profesor doctor Vladimir Balan a făcut observaţii referitoare la anumite probleme speciale. Tuturor le aduc calde mulţumiri.

Totodată mulţumesc membrilor Catedrei Matematici I din cadrul Universităţii "Politehnica" din Bucureşti pentru sprijinul moral acordat.

Şi nu în ultimul rând, ţin să mulţumesc familiei mele: soţiei, tatălui, mamei şi bunicii, adică celor care mai presus de orice au crezut în mine, această teză fiind totodată şi un omagiu adus bunicului meu, care s-a transformat în "pasăre" să-mi calăuzească paşii în domeniul ştiinţei.

Bibliografie

[1] A. Bejancu, Papaghiuc N., *Semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold*, An. Ştiint. Al. I. Cuza, Univ. Iaşi **27** (1981), 163-170.

[2] D.E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Math. **509**, Springer, Berlin, 1976.

[3] D.E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics **203**, Birkhäuser, Boston, 2002.

[4] J. Bolton, G.R. Jensen, M. Rigoli, L.M. Woodward, *On conformal minimal immersions of* $\mathbf{S}^2$ *in* $\mathbf{CP}^n$, Math. Ann. **279** (1988), 599-620.

[5] W.M. Boothby, H.C. Wang, *On contact manifolds*, Ann. of Math. **68** (1958), 721-734.

[6] F. Bowman, *Introduction to elliptic functions with applications*, John Willey & Sons, Inc., New York, 1997.

[7] K. Buchner, D. Cioroboiu, A. Oiagă, R. Roşca, *On f-Kenmotsu manifolds of order 2*, Stud. Cerc. Şt. Univ. Bacău, Proc. 11-th Nat. Conf. Finsler Lagrange Hamilton Geom., Sect. Mat. **10** (2000), 53-73.

[8] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez, *Semi-slant submanifolds of a Sasakian manifold*, Geometriae Dedicata, **78** (1999), 183-199.

[9] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez, *Slant submanifolds in Sasakian space forms*, Glasgow Math. J. **42** (2000), 125-138.

[10] E. Calabi, *Isometric embeddings of complex manifolds*, Ann. of Math. **58** (1953), 1-23.

[11] E. Calabi, *Metric Riemann surfaces*, Contributions to the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies **30** (1953), Princeton 77-85.

[12] B.Y. Chen, *Geometry of Slant Submanifolds*, K.U. Leuven, 1990.

[13] B.Y. Chen, *Slant immersions*, Bull. Austral. Math. Soc. **41** (1990), 135-147.

[14] B.Y. Chen, *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds*, Arch. Math. **60** (1993), 568-578.

[15] B.Y. Chen, *A Riemannian invariant and its applications to submanifold theory*, Results in Mathematics **27** (1995), 17-26.

[16] B.Y. Chen, *Jacobi's elliptic functions and Lagrangian immersions*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **126** (1996), 687-704.

[17] B.Y. Chen, *Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions*, Glasgow Math. J. **41** (1999), 33-41.

[18] B.Y. Chen, *Riemannian Submanifolds. Handbook of Differential Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[19] B.Y. Chen, J.M. Morvan, *Cohomologie des sous-variétés* $\alpha-$*obliques*, C.R. Acad. Sci. Paris **314** (1992), 931-934.

[20] B.Y. Chen, Y. Tazawa, *Slant surfaces of codimension two*, Ann. Fac. Sc. Toulouse **11** (1990), 29-43.

[21] B.Y. Chen, Y. Tazawa, *Slant submanifolds in complex Euclidean spaces*, Tokyo J. Math. **14** (1991), 101-120.

[22] B.Y. Chen, L. Vrancken, *Existence and uniqueness theorem for slant immersions and its applications*, Results in Math. **31** (1997), 28–39.

[23] S.S. Chern, *Pseudo-groupes continus infinis*, Colloques Internationaux du C.N.R.S., Strasbourg, 1953, 119-136.

[24] S.S. Chern, J.G. Wolfson, *Minimal surfaces by moving frames*, Amer. J. Math. **105** (1983).

[25] D. Cioroboiu, *Submanifolds in Sasakian space forms*, Analele Universităţii Bucureşti Anul **L** , Nr. **2** (2001), 33-41.

[26] D. Cioroboiu, *Some inequalities for $k-$ Ricci curvature of certain submanifolds in Sasakian space forms*, Global Analysis, Differential Geometry Lie Algebras, Conference Applied Differential Geometry. General Relativity, BSG Proceedings **10**, Geometry Balkan Press (2004), 59-56.

[27] D. Cioroboiu, *Scalar curvature of C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Differential Geometry - Dynamical Systems, Vol. **4**, No.**1** (2002), 5-11.

[28] D. Cioroboiu, *C-totally real submanifolds of $\mathbf{R}^{2n+1}$ satisfying a certain inequality*, Balkan J. Geom. Appl. **7**, No. **1** (2002), 55-62.

[29] D. Cioroboiu, *B.Y. Chen inequalities for bi-slant submanifolds in Sasakian space forms*, Demonstratio Mathematica no. **1** (2003), Vol. **36**, 179-187.

[30] D. Cioroboiu, *Shape operator A_H for C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Math. J. Toyama Univ. **26** (2003).

[31] D. Cioroboiu, *B.Y. Chen inequalities for semi-slant submanifolds in Sasakian space forms*, I.J.M.M.S., No. **27** (2003), 1731-1738.

[32] D. Cioroboiu, *Some inequalities for Ricci curvature of certain submanifolds in Sasakian space forms*, Acta Math. Academiae Paedagogicae Nyiregyháziensis Vol. **19**, No. **2** (2003), 233-243.

[33] D. Cioroboiu, A. Oiagă, *B.Y. Chen inequalities for slant submanifolds in Sasakian space forms*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **52** (2003), 367-381.

[34] J. Dieudonné, *Treatise on Analysis*, vol. **4**, Academic Press, New York, 1974.

[35] J.H. Eschenburg, I.V. Guadalupe, R.A. Tribuzy, *The fundamental equations of minimal surfaces in* $\mathbf{CP}^2$, Math. Ann. **270** (1985), 571-578.

[36] F. Etayo, R. Roşca, *Framed* $(2m+3)$*-dimensional Riemannian manifolds endowed with a Kenmotsu almost contact* 3*-structure*, Libertas Math. **16** (1996), 91-103.

[37] F. Etayo, R. Roşca, *On Riemannian manifolds endowed with a* $\mathcal{T}$*-parallel almost contact* 4*-structure*, Publicationes Math. Debrecen **50** (1997), 57-68.

[38] V.V. Goldberg, R. Roşca, *Almost conformal* 2*-cosymplectic pseudo-Sasakian manifolds*, Note Mat. **8** (1988), 123-140.

[39] J. Gray, *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math. **69** (1959), 421-450.

[40] Y. Hatakeyama, Y. Ogawa, S. Tanno, *Some properties of manifolds with contact metric structures*, Tohoku Math. J. **15** (1963), 42-48.

[41] S. Ianuş, *Submanifolds of almost Hermitian manifolds*, Riv. Mat. Univ. Parma **3** (1994), 123-142.

[42] S. Ianuş, C. Gheorghe, A.M. Pastore, *CR-manifolds, harmonic maps and stability*, Journal of Geometry (2000).

[43] S. Ianuş, I. Mihai, *On the semi invariant submanifolds in an almost paracontact riemannian manifolds*, Homagial Vol. Kawaguchi, Tensor **39** (1982), 195-200.

[44] S. Ianuş, I. Mihai, *Varietati paracontact si subvarietati semi-invariante in varietati metrice paracontact*, Lucrarile Colocviului National Geometrie si Topologie, Busteni 1981, Tipografia Univ. Bucuresti, (1983), 160-170.

[45] S. Ianuş, A.M. Pastore, M Vişinescu, *Riemannian Submersions: Recent results relevant to Mathematical Physics*, 34-48 (1998).

[46] S. Ianuş, C. Udrişte, *Asupra fibrării tangente a unei varietaţi diferenţiale*, Stud. şi Cercet. Mat., tom **XXII** (1970), 599-611.

[47] T. Ikawa, *On the lenght of second fundamental form of slant surfaces*, Tensor N.S. **52** (1993), 249-254.

[48] E. Käehler, *Über eine bemerkenswerte Hermitische Metrik*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9** (1933), 173-186.

[49] S. Maeda, Y. Ohnita, S. Udagawa, *On slant immersions into Käehler manifolds*, Kodai Math. J. **16** (1993), 205-219.

[50] I. Mihai, *CR-submanifolds of a framed f-manifold*, Stud. Cerc. Mat. **36** (1983), 127-136.

[51] R. Miron, *The geometry of Myller configurations*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1966.

[52] R. Miron, *Geometry of vector subbundles in a vector bundle*, Tensor N.S. **53** (1993), 1-23.

[53] R. Miron, M. Anastasiei, *The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publ., 1994.

[54] R. Miron, M. Anastasiei, *Generalized Finsler metrics*, Amer. Math. Soc. **196** (1996), 187-195.

[55] Y. Ohnita, *Minimal surfaces with constant curvature and Käehler angle in complex space forms*, Tsukuba J. Math. **13** (1989), 191–207.

[56] M. Okumura, *On contact metric immersion*, Kodai Math. Sem. Rep. **20** (1968), 239-409.

[57] V. Oproiu, G. Gheorghiev, *Varietăţi diferenţiale finit şi infinit dimensionale I+II*, Ed. Academiei I (1976), II (1979).

[58] V. Oproiu, *Geometrie diferenţială*, Ed. Universităţii Al. Ioan Cuza (2002).

[59] N. Papaghiuc, *Semi-invariant submanifolds in a Kenmotsu manifold*, Rendiconti di Matematica, Roma, vol **3 (4)** (1983), 607-622.

[60] N. Papaghiuc, *Semi-invariant products in Sasakian manifolds*, An. Şt. Univ. Al.I. Cuza Iaşi, **30** (1984), 75-84.

[61] N. Papaghiuc, *Semi-slant submanifolds of a Kaehlerian manifold*, An. Şt. Univ. Al.I. Cuza Iaşi, **40** (1994), 55-61.

[62] N. Papaghiuc, A. Bejancu, *Some results on sectional curvature of semi-invariant submanifolds in Sasakian space forms*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. de la Roumanie, **75** (1983), 99-110.

[63] N. Papaghiuc, A. Bejancu, *Normal semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold*, Matematicki Vesnik, **35** (1983), 345-355.

[64] N. Papaghiuc, A. Bejancu, *Semi-invariant submanifolds of a Sasakian space form*, Coloquium Mathematicum, **XLVIII** (1984), 77-88.

[65] G. Pitiş, *Stability of integral submanifolds in a Sasakian manifold*, Kyungpook Math. J., **41** no. **2**, (2001), 381-392.

[66] G. Pitiş, *Chern classes of integral submanifolds of some contact manifolds*, Int. J. Math. Math. Sci., **32** (2002), 481-490.

[67] R. Roşca, *On para-Sasakian manifolds*, Rend. Sem. Mat. Messina **1** (1991), 201-216.

[68] S. Sasaki, *On differential manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I*, Tohoku Math. J. **12** (1960), 459-476.

[69] S. Sasaki, Y. Hatakeyama, *On differential manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II*, Tohoku Math. J. **13** (1961), 281-294.

[70] S. Sasaki, Y. Hatakeyama, *On differentiable manifolds with contact metric structures*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 249-271.

[71] J.A. Schouten, D. van Dantzing, *Üder unitäre Geometrie*, Math. Ann.**103** (1930), 319-346.

[72] S. Tachibana, W.N. Yu, *On Riemannian space admitting more thet one Sasakian structure*, Tohoku Math. J. **22** (1970), 536-540.

[73] Y. Tazawa, *Construction of slant immersions*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **22** (1994), 153-166.

[74] Y. Tazawa, *Construction of slant immersions II*, Bull. Belg. Math. Soc. **1** (1994), 569-576.

[75] C. Udrişte, *Introducerea unor invarianţi diferenţiali intrinseci într-o varietate riemanniană*, St. Cerc. Mat. **21**, nr. **3** (1969), 509-514.

[76] C. Udrişte, *Grupuri de mişcări şi direcţiile liniilor de curbură*, Bul. IPB, **32**, nr. **4** (1970), 29-34.

[77] C. Udrişte, *Almost coquaternion hypersurfaces*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **15**, nr. **9** (1970), 1545-1551.

[78] C. Udrişte, *On the Riemannian curvature tensor*, Bull. Math. Soc. Sci. Math., **16** (64), nr. **4** (1974), 471-476.

[79] C. Udrişte, *Independent vector fields on orientable hypersurfaces of* R^{n+1}, Simpozionul de Geometrie şi Analiză globală, Ed. Academiei (1976), 163-164.

[80] C. Udrişte, *Convex functions on Riemannian manifolds and submanifolds*, Bul. Inst. Politehn. Bucuresti. Ser. Mec. **46/47** (1984/85), 8–15.

[81] C. Udrişte, *Convex hypersurfaces*, Analele St. Univ. Al. I. Cuza, Iaşi **32** (1986), 85-87.

[82] C. Udrişte, *On the ranks of curvature tensors in a Finsler manifold*, Symp. on Finsler Geom. at Yokosuka, Japan 1986.

[83] C. Udrişte, *Extremum points of square lengths of some vector fields*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR, **30** (78), **4** (1986), 361-370.

[84] C. Udrişte, M. Fukui, *Properties of* v*-curvature tensors in Finsler manifolds*, Tensor N.S., vol. **46** (1987), 52-57.

[85] C. Udrişte, *Convergence of minimization methods on Riemannian manifolds*, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. **55** (1993), no. **3-4**, 247–254.

[86] C. Udrişte, *Completeness of Finsler manifolds*, Publicationes Mathematicae Debrecen, **42**, no. **1-2** (1993), 45-50.

[87] C. Udrişte, *Convex functions and optimization methods on Riemannian manifolds*, Mathematics and its Applications, **297**. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994.

[88] C. Udrişte, *Optimization methods on Riemannian manifolds*, Algebras Groups Geom. **14** (1997), no. **4**, 339–358.

[89] C. Udrişte, *Geometric Dynamics,* Mathematics and Its Applications, **513**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.

[90] C. Udrişte, Gh. Mocică, *Concerning Sasakian 3-structures on three-dimensional manifolds*, Bul. Inst. Politehn. Bucureşti Ser. Electrotehn. **39** (1977), no. **1**, 3–8.

[91] C. Udrişte, O. Şandru, C. Dumitrescu, A. Zlătescu, *Ţiţeica indicatrix and figuratrix*, Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebras , BSG Proceedings 2, Geometry Balkan Press (1998), 117-124.

[92] A. Weyl, *Sur la théorie des formes différentiables attachées à une variété analytique complexe*, Comm. Math. Helv. **20** (1947), 110-116.

[93] J. Yang, *On slant surfaces with constant mean curvature in C^2*, J. Geom. **59** (1997), 184-201.

[94] K. Yano, S. Ishihara, *Invariant submanifolds of an almost contact manifold*, Kodai Math. Sem. Rep. **21** (1969), 350-364.

[95] K. Yano, M. Kon, *Anti-invariant Submanifolds*, M. Dekker, New York, 1976.

[96] K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific, Singapore, 1984.

Capitolul 2
Subvarietăţi şi invarianţi Chen

1 Structuri aproape de contact

Vom reaminti câteva definiţii şi proprietăţi privind noţiunile de bază ale teoriei subvarietăţilor [3], [10].

Fie M^{2n+1} o varietate diferenţiabilă ($\dim M = 2n+1$). Tripletul (ϕ, ξ, η) se numeşte (ϕ, ξ, η)-*structură* dacă satisface

$$\begin{cases} \eta(\xi) = 1, \\ \phi^2 = -Id + \eta \otimes \xi, \end{cases}$$

unde ϕ este un câmp de endomorfisme ale spaţiilor tangente, ξ este un câmp vectorial, η o 1-formă, iar Id este tensorul identitate (Kronecker).

Propoziţie. *Presupunem că* $M^{2n+1}(\dim M = 2n+1)$ *are o* (ϕ, ξ, η)*-structură. Atunci*

$$\begin{cases} \phi\xi = 0, \\ \eta \circ \phi = 0, \\ \operatorname{rang} \phi = 2n. \end{cases}$$

Dacă o varietate M^{2n+1} cu o (ϕ, ξ, η)-structură admite o metrică riemanniană g astfel încât

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

pentru orice câmpuri vectoriale X, Y spunem că M^{2n+1} are o (ϕ, ξ, η, g)-*structură* sau o *structură metrică aproape de contact* (g se numeşte *metrica compatibilă*) [36].

Observaţie. O varietate diferenţiabilă $M^{2n+1}(\dim M = 2n+1)$ are o structură aproape de contact dacă grupul structural al subfibratului tangent este reductibil la $U(n) \times 1$ [22].

Propoziţie. *Orice varietate aproape de contact M^{2n+1} admite o metrică riemanniană g astfel încât*

$$\begin{cases} \eta(X) = g(X, \xi), \\ g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \end{cases}$$

pentru orice câmpuri vectoriale X, Y pe M^{2n+1}.

Pentru (ϕ, ξ, η, g) metrică aproape de contact, dacă η are rangul maxim, atunci avem metrică de contact.

Propoziţie. *Orice varietate aproape de contact este orientabilă.*

Exemple de structuri aproape de contact:

1. $M^{2n} \times \mathbf{R}$. Fie M^{2n} o varietate aproape complexă, cu structura aproape complexă J. Vom considera varietatea $M^{2n+1} = M^{2n} \times \mathbf{R}$. Notăm un câmp vectorial pe M^{2n+1} prin $\left(X, f\dfrac{d}{dt}\right)$, unde X este tangent la M^{2n}, t este o coordonată din $\mathbf{R}$ şi f o C^∞ funcţie pe M^{2n+1}.

Aceasta ne conduce la $\eta = dt$, $\xi = \left(0, \dfrac{d}{dt}\right)$ şi $\phi\left(X, f\dfrac{d}{dt}\right) = (JX, 0)$. (ϕ, ξ, η) este clar o structură aproape de contact pe M^{2n+1}.

2. Varietăţi paralelizabile. Fie M^{2n+1} o varietate paralelizabilă de dimensiune impară şi notăm cu $X_1, ..., X_{2n+1}$ o mulţime de câmpuri vectoriale ce paralelizează pe M. Mai mult, $g(X_A, X_B) = \delta_{AB}$, $A, B = 1, ..., 2n+1$, defineşte o metrică riemanniană pe M^{2n+1}.

Fie $\xi = X_{2n+1}$ şi η forma duală în raport cu g. Similar, fie ω^i forma duală a lui X_i, $i = 1, ..., n$ şi ω^{i^*} forma duală a lui X_{i^*}, $i^* = 1, ..., n$, astfel încât $X_{n+i} = X_{i^*}$. Atunci, definind $\phi = \sum_{i=1}^{n}(\omega^i \otimes X_{i^*} - \omega^{i^*} \otimes X_i)$, este uşor de verificat că (ϕ, ξ, η, g) este o structură metrică aproape de contact.

3. În particular orice **grup Lie de dimensiune impară** admite o structură aproape de contact.

2 Structuri complexe. Structuri de K-contact

O celebră teoremă a lui Newlander şi Nirenberg [31] afirmă că o structură aproape complexă J, de clasă $C^{2n+\alpha}$, cu tensorul Nijenhuis nul, este integrabilă, adică este structură aproape complexă asociată unei structuri complexe.

Câmpul tensorial $N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$ de tipul (1,2) se numeşte *torsiunea Nijenhuis* N_J a câmpului tensorial J de tipul $(1,1)$.

O *structură aproape complexă* se numeşte *integrabilă* dacă are torsiunea Nijenhuis N_J nulă.

Fie M^{2n+1} o varietate aproape de contact cu structura aproape de contact (ϕ,ξ,η) şi considerăm varietatea $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$. Notăm un câmp vectorial pe $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$ prin $\left(X, f\dfrac{d}{dt}\right)$, unde X este tangent la M^{2n+1}, t este o coordonată din $\mathbf{R}$ şi f o C^∞-funcţie pe $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$. Definim o *structură aproape complexă* J pe $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$ prin

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right).$$

Se arată că $J^2 = -I$. Dacă J este integrabilă, spunem că *structura aproape de contact* (ϕ,ξ,η) este *normală* [37].

Structura aproape de contact defineşte patru câmpuri tensoriale: $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ şi $N^{(4)}$

$$\begin{aligned}
N^{(1)}(X,Y) &= N_\phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi\\
N^{(2)}(X,Y) &= (L_{\phi X}\eta)Y - (L_{\phi Y}\eta)X\\
N^{(3)}(X,Y) &= (L_\xi\phi)X\\
N^{(4)}(X,Y) &= (L_\xi\eta)X,
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
(L_\xi\phi)X &= -[\phi X,\xi] + \phi[X,\xi],\\
(L_\xi\eta)(X)\frac{d}{dt} &= (\xi\eta(X))\frac{d}{dt} + \eta([X,\xi])\frac{d}{dt}.
\end{aligned}$$

Structura aproape de contact (ϕ,ξ,η) este normală dacă şi numai dacă $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)} \equiv 0$.

Observaţie. Structura aproape de contact normală este analogul structurii aproape complexe integrabile. În cazul structurii aproape complexe, integrabilitatea este echivalentă cu anularea tensorului Nijenhuis N_J. În cazul structurii aproape de contact, anularea tensorului N_ϕ ar conduce la un concept de integrabilitate a structurii aproape de contact, care revine la a spune că există un sistem de coordonate în care ϕ are toate componentele constante. Atunci acest concept nu este interesant din punct de vedere geometric. Sasaki a avut ideea de a introduce conceptul de normalitate pentru structurile aproape de contact, care devine un analog natural din punct de vedere geometric al condiţiei de integrabilitate de la structurile aproape complexe.

Propoziţie [3]. *Structura aproape de contact* (ϕ, ξ, η) *pe* M^{2n+1} *este normală dacă şi numai dacă*

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0.$$

Fie M^{2n+1} o varietate metrică de contact cu structura metrică de contact (ϕ, ξ, η, g). Dacă câmpul vectorial de structură ξ este un câmp vectorial Killing în raport cu g, atunci structura de contact pe M se numeşte *structură de K-contact* şi M este o *varietate de K-contact*.

Observaţie. Varietăţile de contact sunt analogul natural al varietăţilor aproape Kähler. Pentru ambele clase se cere anularea formei a doua fundamentale. La varietăţile de contact $d(d\eta) = 0$.

Proprietăţile de bază ale varietăţilor de contact sunt cuprinse în următoarele propoziţii:

Propoziţie [3]. *Fie M o varietate metrică de contact. Atunci M este o varietate de K-contact dacă şi numai dacă $N^{(3)}$ este nul.*

Propoziţie [3]. *Fie M o varietate metrică de contact. Atunci M este o varietate de K-contact dacă şi numai dacă $\nabla_X \xi = -\phi X$.*

Acum dăm o caracterizare geometrică privind varietăţile de K-contact [25].

Teoremă. *Pentru ca o varietate riemanniană M^{2n+1} sa fie de K-contact, este necesar şi suficient ca următoarele două condiţii să fie satisfăcute:*

(1) *M admite un câmp vectorial unitar Killing ξ;*

(2) *curbura secţională a secţiunilor plane conţinând ξ este* 1 *în orice punct din M.*

Teoremă. *O varietate metrică de contact M^{2n+1} este varietate de K-contact dacă şi numai dacă curbura Ricci în direcţia câmpului vectorial caracteristic ξ este egal cu $2n$.*

3 Varietăţi Sasaki

Pentru exemplificarea varietăţilor Sasaki, vom cita definiţii din [3].

Definiţie. Dacă structura metrică de contact (ϕ, ξ, η, g) este normală, ea se numeşte *metrică normală de contact* sau *structură Sasaki*.

Definiţie. O varietate riemanniană $(2m+1)$-dimensională $(\widetilde{M}, g)$ se numeşte *varietate Sasaki* dacă admite o structură metrică de contact, astfel încât:

$$\begin{cases} \phi^2 = -Id + \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \phi\xi = 0, \quad \eta \circ \phi = 0, \\ g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad \eta(X) = g(X,\xi), \\ \widetilde{\nabla}\phi = -g \otimes \xi + I \otimes \eta, \quad \widetilde{\nabla}_X \xi = \phi X, \end{cases}$$

pentru orice câmpuri vectoriale X, Y pe $T\widetilde{M}$, unde cu $\widetilde{\nabla}$ notăm conexiunea riemanniană în raport cu g, iar I reprezintă identitatea.

Din această definiţie observăm analogia remarcabilă între varietăţile Kähler şi Sasaki. Formula $\nabla J = 0$ care caracterizează varietăţile Kähler este extinsă la formula de mai sus în cazul Sasaki.

Observaţie. Pentru varietăţile Sasaki, avem

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \eta(Y)X - \eta(X)Y \\ R(X,\xi)Y &= -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X. \end{aligned}$$

Următoarele teoreme prezintă câteva condiţii pentru existenţa varietaţilor Sasaki [3]:

Teoremă. *O structură metrică aproape de contact (φ, ξ, η, g) este Sasaki dacă şi numai dacă*

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X,$$

unde ∇ reprezintă conexiunea riemanniană din g.

Teoremă. *Fie M^{2n+1} o varietate riemanniană care admite un câmp unitar vectorial Killing ξ astfel încât*

$$R(X,Y)\xi = g(\xi,Y)X - g(X,\xi)Y.$$

Atunci M^{2n+1} este varietate Sasaki.

În particular, structura uzuală metrică de contact pe o sferă de dimensiune impară este structură Sasaki.

Teoremă. *Numărul Betti de ordinul* 1 *al unei varietăţi Sasaki compacte M^{2n+1} este zero sau par.*

Observaţie. În 1960 s-au dezvoltat cercetările cu privire la studiul topologic al varietăţilor Sasaki compacte. Pentru aceasta, menţionăm [39] şi [41], în care s-a arătat printr-un exemplu că numărul Betti b_p, de ordinul p, este par pentru p impar şi $1 \leq p \leq n$. Prin dualitate, b_p este par pentru p impar şi $n+1 \leq p \leq 2n$ [2], [20]. Grupul fundamental a fost studiat de către Blair, Goldberg [2] şi Harada [23], [24]. O atenţie considerabilă a fost acordată nulităţii numărului Betti de ordinul doi, sub restricţii ale curburii, ca izometrii ale sferei. Prin rezultatele topologice privind numărul Betti de ordinul 1 al unei varietăţi Sasaki, se poate vedea că torul 3-dimensional nu poate avea structură Sasaki.

Alte proprietăţi remarcabile pentru varietăţile Sasaki sunt concretizate şi prin următoarele teoreme:

Teoremă [30]. *O varietate Sasaki compactă cu curbura strict pozitivă are numărul Betti de ordinul doi nul.*

Teoremă [30]. *Un spaţiu Sasaki-Einstein compact, simplu conex cu curbura strict pozitivă este izometric cu sfera unitate.*

Teoremă [21], [34]. *Un spaţiu Sasaki, compact, simplu conex şi simetric este izometric cu o sferă.*

Teoremă [34]. *O varietate Sasaki conform plată de dimensiune* ≥ 5 *are curbura constantă.*

Exemple de varietăţi Sasaki:

1. $\mathbf{R}^{2n+1}$ cu structură aproape de contact asociată (ϕ, ξ, η, g), unde

$$\eta = \frac{1}{2}\left(dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i\right),$$

iar (x^i, y^i, z) sunt coordonatele carteziene.

2. Structura aproape de contact non-normală pe S^5

O structură metrică aproape de contact (ϕ, ξ, η, g) cu $(\nabla_X \varphi)X = 0$ se numeşte *structură nearly cosimplectică.*

S^5, privită ca o hipersuprafaţă total geodezică din S^6, induce o structură nearly cosimplectică.

3. Fibrările cu cercuri peste anumite clase de varietăţi Kähler

4. $S^{2n+1} \subset \mathbf{C}^{n+1}$. Structura metrică de contact uzuală pe hipersfera S^{2n+1} din $\mathbf{C}^{n+1}$ este Sasaki.

Acest exemplu se extinde la o clasă mai largă (vezi următoarea teoremă).

Teoremă [44]. *Fie* $\iota : M^{2n+1} \to M^{2n+2}$ *o* C^∞ *hipersuprafaţă orientabilă a unei varietăţi Kähler. Atunci, structura metrică aproape de contact indusă*

(ϕ, ξ, η, g) este Sasaki dacă şi numai dacă forma a doua fundamentală este $h = -g + \beta\eta \otimes \eta$, unde β este o funcţie.

O structură metrică de contact (ϕ, ξ, η, g) se numeşte *nearly Sasaki* dacă

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_Y \phi)X = 2g(X, Y)\xi - \eta(X)Y - \eta(Y)X.$$

Considerăm S^5 ca o hipersuprafaţă ombilicală din sfera unitate S^6 cu ”latitudinea” de 45° astfel încât $h = -g$. Atunci, structura metrică aproape de contact indusă este nearly Sasaki, dar nu Sasaki.

4 Forme spaţiale Sasaki

Fie M^{2n+1} o varietate Sasaki cu structura tensorială (ϕ, ξ, η, g), pe care se defineşte un câmp tensorial P de tipul $(0, 4)$ prin:

$$\begin{aligned} P(X, Y; Z, W) \;=\; & d\eta(X, Z)g(Y, W) - d\eta(X, W)g(Y, Z) - d\eta(Y, Z)g(X, W) \\ & + d\eta(Y, W)g(X, Z). \end{aligned}$$

Avem

$$P(X, Y; Z, W) = -P(Z, W; X, Y).$$

Dacă $\{X, Y\}$ este o pereche ortonormată, ortogonală la ξ şi dacă alegem

$$g(X, \phi Y) = \cos\theta, \quad \theta \in [0, \pi],$$

atunci

$$P(X, Y; X, \phi Y) = -\sin^2\theta.$$

Pe o varietate Sasaki avem

$$\begin{aligned} g(R(X, \phi X)Y, \phi Y) = {} & g(R(X, Y)X, Y) + g(R(X, \phi Y)X, \phi Y) \\ & -2P(X, Y; X, \phi Y), \end{aligned}$$

pentru X, Y, Z şi W ortogonali la ξ.

O secţiune plană π din $T_p\widetilde{M}$ se numeşte *ϕ-secţiune* [3] dacă este generată de X şi ϕX, unde X este un vector unitar ortogonal la ξ. Curbura secţională a unei ϕ-secţiuni se numeşte *ϕ-curbura secţională*, notată prin $c(X)$ sau c.

Dacă toate ϕ-curburile secţionale sunt constante în fiecare punct, atunci obţinem conceptul de formă spaţială Sasaki.

Definiţie. O varietate Sasaki cu ϕ-curbura secţională constantă c se numeşte *formă spaţială Sasaki* şi se notează prin $\widetilde{M}(c)$.

Teoremă [30]. *Pe o varietate Sasaki, ϕ-curbura secţională determină complet curbura.*

Curbura secţională a unei varietăţi Sasaki are următoarea proprietate:

Propoziţie. *Fie M^{2n+1} o varietate Sasaki şi $\{X, Y\}$ o pereche ortonormată din T_pM^{2n+1} cu X şi Y ortogonali la ξ. Fie $g(X, \phi Y) = \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$. În aceste condiţii, curbura secţională $K(X, Y)$ este dată de:*

$$\begin{aligned} K(X,Y) \;=\; & \frac{1}{8}\Big[3(1+\cos\theta)^2 c(X+\phi Y) + 3(1-\cos\theta)^2 c(X-\phi Y) \\ & -c(X+Y) - c(X-Y) - c(X) - c(Y) + 6\sin^2\theta\Big]. \end{aligned}$$

Pentru cazul Sasaki, are loc şi o versiune a teoremei Schur.

Teoremă [3]. *Dacă ϕ-curbura secţională în orice punct al unei varietăţi Sasaki de dimensiune ≥ 5 este independentă de alegerea ϕ-secţiunii în acel punct, atunci este constantă pe varietate şi tensorul de curbură este dat de*

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z \;=\; & \frac{c+3}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} + \frac{c-1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)Y \\ & -\eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi \\ & +g(\phi Y,Z)\phi X - g(\phi X,Z)\phi Y + 2g(\phi X,Y)\phi Z\} \end{aligned}$$

pentru orice câmpuri vectoriale X, Y, Z iar c este ϕ-curbura secţională constantă.

Tensorul Ricci S şi *curbura scalară τ* sunt date de

$$S(X,Y) = \frac{n(c+3)+c-1}{2}g(X,Y) - \frac{(n+1)(c-1)}{2}\eta(X)\eta(Y),$$

$$\tau = \frac{1}{2}[n(2n+1)(c+3) + n(c-1)].$$

Exemple de forme spaţiale Sasaki:

1. S^{2n+1}. Sfera unitate S^{2n+1} are curbura secţională constantă 1. Notăm structura metrică de contact prin (ϕ, ξ, η, g) şi considerăm structură deformată

$$\eta^* = \alpha\eta, \qquad \xi^* = \frac{1}{\alpha}\xi, \qquad \phi^* = \phi, \qquad g^* = \alpha g + \alpha(\alpha-1)\eta\otimes\eta,$$

unde $\alpha > 0$ şi $c = 1$.

O astfel de deformare se numeşte *D-deformare omotetică*, deoarece metrica restricţionată la distribuţia de contact D este omotetică.

Propoziţie [40]. *S^{2n+1}, cu structura de mai sus, este o formă spaţială Sasaki cu $\phi-$curbura secţională constantă $c = \frac{4}{\alpha} - 3$.*

2. $\mathbf{R}^{2n+1}$ cu coordonatele (x^i, y^i, z), $i = 1, ..., n$, admite structura Sasaki

$$\eta = \frac{1}{2}\left(dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i\right), \qquad g = \frac{1}{4}\left\{\eta \otimes \eta + \sum_{i=1}^{n}[(dx^i)^2 + (dy^i)^2]\right\}.$$

Cu această metrică, $\mathbf{R}^{2n+1}$ este o formă spaţială Sasaki cu $c = -3$ [33].

3. $B^n \times \mathbf{R}$. Fie B^n un domeniu mărginit simplu conex din $\mathbf{C}^n$ şi (J, G) o structură Kähler cu curbura secţională holomorfă constantă $k < 0$. Atunci, 2-forma fundamentală Ω a structurii Kähler este închisă, $\Omega = d\omega$ pentru o 1-formă ω analitică reală. Cu t notăm o coordonată din $\mathbf{R}$ şi $\eta = \pi^*\omega + dt$.

Privind η ca o formă de conexiune pe fibratul liniar trivial, atunci η şi $g = \pi^*G + \eta \otimes \eta$ definesc o structură Sasaki cu forma de curbură $d\eta = \pi^*\Omega$.

Printr-un calcul direct [32],

$$K(\widetilde{\pi}X, \widetilde{\pi}Y) = K_*(X, Y) - 3\eta(\nabla_{\widetilde{\pi}X}\widetilde{\pi}Y)^2,$$

unde $\{X, Y\}$ este o pereche ortonormată pe B^n, $\widetilde{\pi}$ liftul orizontal şi K_* curbura secţională din B^n.

Cum $g(\nabla_{\widetilde{\pi}X}\widetilde{\pi}Y, \xi) = -g(\widetilde{\pi}Y, \nabla_{\widetilde{\pi}X}\xi) = g(\widetilde{\pi}Y, \phi\widetilde{\pi}X)$, atunci $\phi\widetilde{\pi}X = \widetilde{\pi}JX$, iar $B^n \times \mathbf{R}$ are $\phi-$curbura secţională constantă $c = k - 3$ [41].

Teoremă. *Fie M^{2n+1} o varietate Sasaki simplu conexă, compactă cu ϕ-curbura secţională c.*

1) *Dacă $c > -3$, atunci M este izomorfă cu $S^{2n+1}(c)$ sau M este D-omotetică cu S^{2n+1}.*

2) *Dacă $c = -3$, atunci M este izomorfă cu $\mathbf{R}^{2n+1}(-3)$.*

3) *Dacă $c < -3$, atunci M este izomorfă cu $(B^n \times \mathbf{R})(c)$, unde B^n este discul complex unitate înzestrat cu metrica Bergmann.*

Definiţie. Dacă tensorul Ricci S satisface $S(X, Y) = 2ng(X, Y)$, atunci M este *varietate Einstein*.

Propoziţie. *Dacă tensorul Ricci S al unei varietăţi de K-contact M, este paralel, atunci M este varietate Einstein.*

Propoziţie. *Fie M o varietate de K-contact. Dacă M este local simetrică, atunci M este varietate Sasaki cu curbura constantă 1.*

Observaţie. Condiţia de tensor Ricci paralel şi local simetric nu este esenţială pentru o varietate de K-contact şi de aici, implicit, pentru o varietate Sasaki.

Tensorul Rici al unei varietăţi Sasaki prezintă unele proprietăţi, exemplificate mai jos [42].

Propoziţie. *Tensorul Ricci S pentru M^{2n+1}, este dat de*

$$S(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1} g(\phi R(X,\phi Y)e_i, e_i) + (2n-1)g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Propoziţie. *Tensorul Ricci S, al unei varietăţi Sasaki M^{2n+1}, satisface următoarele ecuaţii:*

$$\begin{aligned} &S(X,\xi) = 2n\eta(X), \\ &S(\phi X, \phi Y) = S(X,Y) - 2n\eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

Propoziţie. *Tensorul Ricci S, al unei varietăţi Sasaki M^{2n+1}, satisface*

$$\begin{aligned} (\nabla_Z S)(X,Y) \; = \; & (\nabla_X S)(Y,Z) + (\nabla_{\phi Y} S)(\phi X, Z) - \eta(X)S(\phi Y, Z) \\ & -2\phi(Y)S(\phi X, Z) + 2n\eta(X)g(\phi Y, Z) + 4n\eta(Y)g(\phi X, Z). \end{aligned}$$

Dacă tensorul Ricci S, al unei varietăţi de K-contact M, are următoarea formă

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y),$$

a şi b fiind constante, atunci M se numeşte *varietate η-Einstein.*

Propoziţie [48]**.** *Dacă o varietate Sasaki are ϕ-curbura secţională constantă, atunci M este varietate η-Einstein.*

Propoziţie. *Fie M^{2n+1} o varietate Sasaki. Dacă tensorul Ricci S al lui M satisface $S(X,Y) = ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y)$, atunci a şi b sunt constante.*

O echivalenţă a formei spaţiale Sasaki este dată şi de următoarea teoremă:

Teoremă [42]. *O varietate Sasaki $M^{2n+1}(n > 2)$ este formă spaţială Sasaki dacă şi numai dacă $R(X, \phi X)X$ este proporţional cu ϕX pentru orice câmp vectorial X din M astfel încât $\eta(X) = 0$.*

5 Subvarietăţi în spaţii Riemann

Fie $(\widetilde{M}^m, g)$ o varietate riemanniană m-dimensională, notată prin $(\widetilde{M}, g)$ sau simplu $\widetilde{M}$. Fie M o subvarietate n-dimensională din $\widetilde{M}$. De asemenea, metrica riemanniană indusă pe M este notată tot cu g.

Un vector $\xi_p \in T_p\widetilde{M}$ se numeşte *vector normal* în $p \in M$ la subvarietatea M dacă $g(X_p, \xi_p) = 0$, $\forall X_p \in T_pM$.

Fie $T_p^{\perp}M$ mulţimea tuturor vectorilor normali în p. Notăm cu

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$$

subfibratul tangent şi cu

$$T^{\perp}M = \bigcup_{p\in M} T_p^{\perp}M$$

fibratul normal al subvarietăţii M.

Fie ΓTM (respectiv $\Gamma T^{\perp}M$) mulţimea secţiunilor fibratului tangent TM (respectiv fibratului normal $T^{\perp}M$). Conexiunea Levi-Civita pe $\widetilde{M}$, respectiv pe M, se va nota cu $\widetilde{\nabla}$, respectiv cu ∇.

Vom reaminti câteva formule şi ecuaţii fundamentale pentru subvarietăţi.

Fie h *forma a doua fundamentală* pentru subvarietatea M. Atunci *formula lui Gauss* poate fi scrisă sub forma

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma TM.$$

Notând prin $\nabla^{\perp}$ conexiunea fibratului normal şi prin A operatorul Weingarten, are loc *formula lui Weingarten:*

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^{\perp}\xi, \quad \forall X \in \Gamma TM, \quad \xi \in \Gamma T^{\perp}M.$$

Dacă notăm cu $\widetilde{R}$, R , $R^{\perp}$, tensorul de curbură în raport cu conexiunile $\widetilde{\nabla}$, ∇ şi respectiv $\nabla^{\perp}$, pentru orice $X, Y, Z \in \Gamma TM$, *ecuaţia lui Gauss* este

$$\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) - g(h(X, Z), h(Y, W)) + g(h(X, W), h(Y, Z)).$$

Considerăm

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X^{\perp} h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(X, \nabla_Y Z),$$

Atunci, componenta normală a lui $\widetilde{R}(X, Y)Z$ este dată de

$$(\widetilde{R}(X, Y)Z)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z).$$

Ecuaţia de mai sus reprezintă *ecuaţia lui Codazzi.*

Fie $\xi, \eta \in \Gamma T^{\perp}M$. Folosind formula lui Weingarten, obţinem *ecuaţia lui Ricci*:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y,\xi,\eta) &= R^{\perp}(X,Y,\xi,\eta) - g(A_{\eta}A_{\xi}X,Y) + g(A_{\xi}A_{\eta}X,Y) \\ &= R^{\perp}(X,Y,\xi,\eta) + g([A_{\xi},A_{\eta}]X,Y).\end{aligned}$$

Dacă forma a doua fundamentală h este identic nulă, atunci M se numeşte *subvarietate total geodezică.*

Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază ortonormată a spaţiului tangent T_pM, $p \in M$, şi H vectorul curbură medie,

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i).$$

Subvarietate M se numeşte *minimală* dacă $H = 0$.

Observaţie. Nu există subvarietăţi minimale compacte în $\mathbf{R}^n$.

Pentru o secţiune normală V pe M, dacă A_V este proporţional cu transformarea identitate I, $A_V = aI$, pentru o funcţie a, atunci V se numeşte *secţiune ombilicală* pe M, sau M se numeşte *ombilicală în raport cu V*. Dacă subvarietatea M este ombilicală în raport cu orice secţiune normală din M, atunci M se numeşte *total ombilicală.*

O definiţie echivalentă este următoarea: M este *total ombilicală* dacă

$$h(X,Y) = g(X,Y)H,$$

pentru orice X, Y tangenţi la M.

Orice subvarietate M care este în acelaşi timp minimală şi total ombilicală este total geodezică.

Dacă forma a doua fundamentală şi curbura medie a lui M din $\widetilde{M}$ satisfac $g(h(X,Y),H) = fg(X,Y)$, pentru o funcţie oarecare f pe M, atunci M se numeşte *pseudo-ombilicală.*

Subvarietatea M se numeşte *paralelă* dacă forma a doua fundamentală h este paralelă, adică $\nabla h = 0$.

Notăm prin

$$h_{ij}^{r} = g(h(e_i, e_j), e_r), \qquad i, j = 1, ..., n; \qquad r = n+1, ..., m,$$

şi

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)).$$

Pentru o suprafaţă M din $\mathbf{R}^4$, curbura medie poate fi exprimată prin

$$\|H\|^2 = \frac{1}{4}\left[(h_{11}^3 + h_{22}^3)^2 + (h_{11}^4 + h_{22}^4)^2\right],$$

iar curbura Gauss este dată de

$$G = h_{11}^3 h_{22}^3 - (h_{12}^3)^2 + h_{11}^4 h_{22}^4 - (h_{12}^4)^2.$$

Dacă curbura Gauss $G = 0$, atunci M este suprafaţă *plată*.

Presupunem că L este un k-subspaţiu vectorial al lui T_pM şi X un vector unitar din L. Alegem o bază ortonormată $\{e_1, ..., e_k\}$ din L astfel încât $e_1 = X$.

Se defineşte [13] *curbura Ricci a lui L în* X, Ric_L, prin

$$\mathrm{Ric}_L(X) = K_{12} + K_{13} + ... + K_{1k},$$

unde K_{ij} este curbura secţională a secţiunii plane generate de e_i, e_j. Mai simplu, se defineşte o astfel de curbură ca fiind k-*curbura Ricci*.

Curbura scalară τ a lui L este dată de

$$\tau(L) = \sum_{1 \le i < j \le k} K_{ij}.$$

Pentru orice *întreg* k, $2 \le k \le n$, invariantul riemannian Θ_k pe o varietate riemanniană n-dimensională M se defineşte prin

$$\Theta_k(p) = \frac{1}{k-1} \inf_{L,X} \mathrm{Ric}_L(X),\ p \in M,$$

unde L parcurge toate subspaţiile vectoriale ale lui T_pM, de dimensiune k, iar X toţi vectorii unitari din L.

Pentru o subvarietate M a unei varietăţi riemanniene, *spaţiul relativ nul* al lui M într-un punct $p \in M$ (sau *nucleul formei a doua fundamentale*) este

$$N(p) = \{X \in T_pM \mid h(X, Y) = 0,\ \forall Y \in T_pM\}.$$

6 Subvarietăţi invariante în varietăţi Sasaki

Fie $\widetilde{M}$ o varietate Sasaki $(2m+1)$-dimensională cu structura tensorială $(\phi, \xi, \eta, \widetilde{g})$.

O subvarietate M a lui $\widetilde{M}$ se numeşte *subvarietate invariantă* dacă câmpul vectorial de structură ξ este tangent la M şi ϕX este tangent la M, pentru orice vector tangent X la M. Evident, M este o varietate Sasaki în raport cu structura tensorială indusă, care poate fi notată prin (ϕ, ξ, η, g).

Fie $\widetilde{\nabla}$ (respectiv ∇) conexiunea Levi-Civita a lui $\widetilde{g}$ (respectiv g). Pentru orice câmp vectorial X pe M, avem

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = \phi X, \quad \widetilde{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + h(X, \xi).$$

Dar cum ϕX este tangent la M, obţinem $h(X, \xi) = 0$. Mai mult, pentru orice câmpuri vectoriale X şi Y din M, obţinem

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X \phi Y &= \nabla_X \phi Y + h(X, \phi Y) = (\nabla_X \phi)Y + \phi \nabla_X Y + h(X, \phi Y) \\
&= -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X + \phi \nabla_X Y + h(X, \phi Y), \\
\widetilde{\nabla}_X \phi Y &= (\widetilde{\nabla}_X \phi)Y + \phi \widetilde{\nabla}_X Y \\
&= -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X + \nabla_X \phi Y + \phi \nabla_X Y + \phi h(X, Y).
\end{aligned}$$

În consecinţă, avem următoarele ecuaţii:

$$h(X, \phi Y) = h(\phi X, Y) = \phi \, \|h(X, Y), h(X, \xi)\| = 0.$$

Propoziţie [43], [47]**.** *Orice subvarietate invariantă M a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}$ este minimală.*

Enunţăm câteva proprietăţi pentru subvarietăţi invariante.

Propoziţie [40]**.** *Fie M o subvarietate invariantă a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}$. Atunci tensorii de curbură R şi K ai lui M şi $\widetilde{M}$ satisfac:*

$$R(X, \phi X, X, \phi X) = K(X, \phi X, X, \phi X) - 2\, \widetilde{g}(h(X, X), h(X, X)).$$

Propoziţie [47]**.** *Fie M o subvarietate invariantă a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ cu ϕ-curbura secţională constantă c. M este total geodezică dacă şi numai dacă M are ϕ-curbura secţională constantă c.*

Propoziţie [26]**.** *Dacă forma a doua fundamentală h a unei subvarietăţi invariante M într-o varietate Sasaki este paralelă, atunci M este total geodezică.*

Dacă presupunem că varietatea $\widetilde{M}$ este formă spaţială Sasaki cu $\phi-$curbura secţională constantă c, atunci

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \frac{1}{2}[n(c+3)+(c-1)]g(X,Y) - \frac{1}{2}(n+1)(c-1)\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad - \sum_i g(h(X,e_i),h(Y,e_i)), \\ \tau &= n^2(c+3)+n(c+1) - \sum_i g(B(e_i,e_j),B(e_i,e_j)), \end{aligned}$$

unde $\{e_i\}$ este o bază ortonormată din M, iar cu S şi τ notăm *tensorul Ricci* şi respectiv *curbura scalară* pe M.

Fie M o subvarietate invariantă a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}$. *Forma a doua fundamentală* h a lui M se numeşte *η-paralelă* dacă

$$(\nabla_{\phi X}h)(\phi Y,\phi Z)=0,$$

pentru toate câmpurile vectoriale X,Y şi Z tangente la M.

Se observă că forma a doua fundamentală h este η-paralelă dacă şi numai dacă

$$(\nabla_X h)(Y,Z)=\eta(X)\phi h(Y,Z)+\eta(Y)\phi h(X,Z)+\eta(Z)\phi h(X,Y).$$

Teoremă. *Fie M^{2n+1} o subvarietate invariantă compactă a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$. Atunci, avem unul dintre cazurile:*

i) *M este total geodezică,*

ii) $\|h\|^2=(n+2)\dfrac{(c+3)}{3}$,

iii) $\|h\|^2(x)>(n+2)\dfrac{(c+3)}{3}$ *în orice punct x din M.*

Teoremă. *Fie M^{2n+1} o subvarietate invariantă η-Einstein a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$. Atunci*

$$0\le \|\nabla h\|^2-3\|h\|^2\le \frac{(n+2)}{2}\left[\frac{1}{n}\|h\|^2-(c+3)\right]\|h\|^2.$$

Dacă subvarietatea invariantă M are $\phi-$curbura secţională constantă k avem îndeplinite rezultatele:

Teoremă. *Fie M^{2n+1} o subvarietate invariantă a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$. Dacă M are ϕ-curbura secţională constantă k, atunci*

$$0\le \|\nabla h\|^2-3\|h\|^2=n(n+1)(n+2)(c-k)\left[\frac{c+3}{2}-(k+3)\right].$$

Teoremă. *Fie M^{2n+1} o subvarietate invariantă a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$. Dacă M are ϕ-curbura secţională k constantă şi $c > -3$, atunci avem unul dintre cazurile:*

i) *M este total geodezică, adică $c = k$,*

ii) $(c + 3) \geq 2(k + 3)$.

Definiţie. Dacă tensorul Ricci S al unei varietăţi Sasaki M satisface

$$(\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) = 0,$$

pentru toate câmpurile vectoriale X, Y şi Z din M, spunem că *tensorul Ricci* S este *η-paralel.*

Pentru proprietăţi enunţăm [26]:

Propoziţie. *Fie M^{2n+1} o subvarietate invariantă a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$ $(c < -3)$. Dacă tensorul Ricci S a lui M este η-paralel, atunci M este $\eta-$Einstein.*

Teoremă. *Fie M o subvarietate invariantă de codimensiune 2 a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2n+3}(c)$. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

(1) *tensorul Ricci al lui M este η-paralel;*

(2) *forma a doua fundamentală pentru M este η-paralelă;*

(3) *M este varietate η-Einstein.*

Exemple de subvarietăţi invariante:

1. Fie S^{2m+1} sfera unitate cu structura Sasaki standard. O sferă unitate de dimensiune impară S^{2n+1} $(n < m)$ ca subvarietate în S^{2m+1}, cu structura indusă este subvarietate invariantă din S^{2m+1}. Evident, forma spaţială Sasaki $E^{2n+1}(-3) \subset E^{2m+1}(-3)$ este subvarietate invariantă total geodezică.

2. Fibratul în cercuri (Q^n, S^1) peste o hipercuadrică din CP^{n+1} este subvarietate invariantă a lui S^{2n+3}, adică η-Einstein.

7 Subvarietăţi anti-invariante tangente la câmpul vectorial de structură

Fie $\widetilde{M}$ o varietate aproape de contact $(2m + 1)-$dimensională cu structura tensorială (ϕ, ξ, η, g). O subvarietate n-dimensională M imersată în $\widetilde{M}$ se numeşte *anti-invariantă* dacă $\phi T_x M \subset T_x^{\perp} M$ pentru orice $x \in M$.

Se observă că ϕ are rangul $2m$, $n \leq m + 1$. Dacă $n = m + 1$ avem:

Propoziţie. *Fie $\widetilde{M}$ o varietate metrică aproape de contact de dimensiune $2n+1$ şi fie M o subvarietate anti-invariantă a lui $\widetilde{M}$ de dimensiune $n+1$. Atunci câmpul vectorial de structură ξ este tangent la M.*

Observaţie. Deoarece $\phi T_xM \subset T_x^{\perp}M$ în fiecare punct x din M, $T_x^{\perp}M$ se descompune într-o sumă directă

$$T_x^{\perp}M = \phi T_xM \oplus N_x(M),$$

unde $N_x(M)$ este complementul ortogonal al lui $\phi(T_xM)$ din $T_x^{\perp}M$, iar

$$N_x(M) = \phi N_x(M) \oplus \{\xi\}.$$

Pentru orice câmp vectorial V normal la M, notăm

$$\phi V = tV + fV,$$

unde tV este partea tangenţială a lui ϕV şi fV partea normală a lui ϕV, unde t este o $1-$formă vectorială pe fibratul normal $T^{\perp}M$ şi f este un endomorfism al fibratului normal $T^{\perp}M$. Avem

$$\begin{cases} tfV = 0, & f^2V = -V - \phi tV + \eta(V)\xi \\ t\phi X = -X, & f\phi X = 0. \end{cases}$$

Mai mult,

$$f^3 + f = 0,$$

care înseamnă că f defineşte o f-structură în fibratul normal al lui M.

Propoziţie. *Fie M o subvarietate tangentă la câmpul vectorial de structură ξ a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}$. Atunci ξ este paralel în raport cu conexiunea indusă pe M, i.e. $\nabla\xi = 0$, dacă şi numai dacă M este subvarietate anti-invariantă în $\widetilde{M}$.*

Prin *subvarietate anti-invariantă M a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}$* se înţelege o subvarietate anti-invariantă tangentă la câmpul vectorial de structură ξ al lui $\widetilde{M}$.

Enunţăm unele din proprietăţile subvarietăţilor anti-invariante [46], [4], [8]:

Propoziţie. *Fie M^{n+1} o subvarietate anti-invariantă a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}$. Dacă $n \geq 1$, atunci M nu este total ombilicală.*

Propoziţie. *Fie M^{n+1} o subvarietate anti-invariantă a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$. Dacă M este minimală, atunci tensorul Ricci şi curbura scalară τ din M satisfac:*

(1) $S-\frac{1}{4}(n-1)(c+3)g+\frac{1}{4}[(n-1)c-(n+3)]\eta\otimes\eta$ *este negativ semi-definită*;

(2) $\tau \leq \frac{1}{4}n(n-1)(c+3)$.

Proprietăţile formei a doua fundamentale sunt [3]:

Propoziţie. *Fie M^{n+1} o subvarietate anti-invariantă a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}$.*

(1) *Dacă forma a doua fundamentală a lui M este paralelă, atunci $H_\lambda = 0$ pentru toţi λ;*

(2) *Dacă vectorul curbură medie al lui M este paralel, atunci $TrH_\lambda = 0$ pentru toţi λ.*

Teoremă. *Fie M^{n+1} o subvarietate anti-invariantă compactă a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$. Atunci, avem unul dintre cazurile*:

i) $\|H\|^2 = 0$,

ii) $\|H\|^2 = n(n+1)\frac{(c+3)}{4(2n-1)}$,

iii) $\|H\|^2(x) > n(n+1)\frac{(c+3)}{4(2n-1)}$ *în* $x \in M$.

Teoremă. *Fie M^{n+1} o subvarietate anti-invariantă minimală a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(1)$. Dacă $\|h\|^2 = \frac{5n^2-n}{2n-1}$, atunci $n = 2$ şi M este plată.*

Exemple de subvarietăţi anti-invariante:

Vom prezenta câteva exemple sugestive de subvarietăţi anti-invariante [3]:

1. Fie $J = (a_{ts})$ $(t, s = 1, ..., 6)$ o structură aproape complexă pe $\mathbf{C}^3$ astfel încât $a_{2i,2i-1} = 1, a_{2i-1,2i} = -1$ $(i = 1, 2, 3)$, iar celelalte componente sunt zero. Fie $S^1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left\{z \in \mathbf{C} \middle| |z|^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, un cerc de rază $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Vom considera

$$M^3 = S^1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

în $S^5 \subset \mathbf{C}^3$, care este evident plată. Vectorul de poziţie X al lui M^3 are componentele date de

$$X = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\cos u^1,\ \sin u^1,\ \cos u^2,\ \sin u^2,\ \cos u^3,\ \sin u^3),$$

u^1, u^2, u^3 fiind parametrii pentru fiecare $S^1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Considerăm $X_i = \dfrac{\partial_i X}{\partial u^i}$ şi avem

$$X_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(-\sin u^1, \cos u^1, 0, 0, 0, 0),$$

$$X_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(0, 0, -\sin u^2, \cos u^2, 0, 0),$$

$$X_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(0, 0, 0, 0, -\sin u^3, \cos u^3).$$

Câmpul vectorial de structură ξ din S^5 este dat de

$$\xi = -JX = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\sin u^1, -\cos u^1, \sin u^2, -\cos u^2, \sin u^3, -\cos u^3).$$

De aici $\xi = -(X_1 + X_2 + X_3)$, iar ξ este tangent la M^3. Pe de altă parte, structura tensorială (ϕ, ξ, η) pe S^5 satisface

$$\phi X_i = JX_i - \eta(X_i)X, \quad i = 1, 2, 3,$$

care arată că ϕX_i este normală la M^3 pentru toţi i. Atunci M^3 e o subvarietate anti-invariantă a lui S^5. Mai mult, M^3 este o subvarietate minimală din S^5 cu $\|h\|^2 = 6$ şi conexiunea normală a lui M^3 este plată.

Teoremă. *Fie M^{n+1} o subvarietate anti-invariantă minimală, compactă din S^{2m+1}. Dacă forma a doua fundamentală din M este paralelă şi dacă $\|h\|^2 = \dfrac{5n^2-n}{2n-1}$, atunci M este $S^1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \subset S^5 \subset S^{2m+1}$.*

2. Fie $S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un cerc de rază $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Atunci $S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ este o subvarietate anti-invariantă minimală a lui S^3 şi, de asemenea, este o subvarietate anti-invariantă minimală a lui $S^{2m+1}(m > 1)$ cu f-structura paralelă din fibratul normal. În acest caz, $\|h\|^2 = 2$.

3. Fie $S^1(r_i) = \{z_i \in \mathbf{C} \mid |z_i|^2 = r_i^2, \quad i = 1, \ldots, n+1\}$. Vom considera

$$M^{n+1} = S^1(r_1) \times \cdots \times S^1(r_{n+1})$$

din $\mathbf{C}^{n+1}$astfel încât $r_1^2 + ... + r_{n+1}^2 = 1$. Atunci M^{n+1} este o subvarietate plată a lui S^{2n+1}, cu vectorul curbură medie paralel şi cu conexiunea normală plată. Vectorul de poziţie X al lui M^{n+1} în $\mathbf{C}^{n+1}$ are componentele date de

$$X = (r_1 \cos u^1, r_1 \sin u^1, \ldots, r_{n+1} \cos u^{n+1}, r_{n+1} \sin u^{n+1}).$$

Atunci X este un vector unitar normal exterior al lui S^{2n+1} în $\mathbf{C}^{n+1}$. Punând $X_i = \partial_i X = \dfrac{\partial X}{\partial u^i}$, avem

$$\begin{aligned}&X_1 = r_1(-\sin u^1, \cos u^1, 0, ..., 0),\\ &\dots\\ &X_{n+1} = r_{n+1}(0, ..., 0, -\sin u^{n+1}, \cos u^{n+1}).\end{aligned}$$

Câmpul vectorial de structură ξ al lui S^{2n+1} este dat de componentele

$$\xi = -JX = (r_1 \sin u^1, -r_1 \cos u^1, \dots, r_{n+1} \sin u^{n+1}, -r_{n+1} \cos u^{n+1}).$$

Se observă uşor că $\xi = -(X_1 + X_2 + X_3)$, adică câmpul vectorial ξ este tangent la M^{n+1}. O astfel de structură tensorială (ϕ, ξ, η, g) pe S^{2n+1} satisface

$$\phi X_i = JX_i - \eta(X_i)X, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Astfel ϕX_i este normal la M^{n+1} pentru toţi i. Adică M^{n+1} este o subvarietate anti-invariantă a lui S^{2n+1}.

4. Fie $S^1(r_i) = \{z_i \in \mathbf{C} \mid |z_i|^2 = r_i^2,\ i = 1, \dots, n+1\}$ un cerc de rază r_i. Considerăm $M^{n+1} = S^1(r_1) \times \dots \times S^1(r_n) \times E^1$. Atunci, definim o scufundare a lui M^{n+1} în $E^{2n+1}(-3)$ prin $(r_1 \cos u^1, \dots, r_n \cos u^n, r_1 \sin u^1, \dots, r_n \sin u^n, z)$. În acest caz, M^{n+1} este o subvarietate anti-invariantă din $E^{2n+1}(-3)$.

5. Fie $\mathbf{R}^{2n+1}$ spaţiul euclidian şi $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, z)$ coordonatele carteziene ale sale. Considerăm următoarea scufundare naturală a lui $\mathbf{R}^{n+1}$ în $\mathbf{R}^{2n+1}$:

$$(x^1, \dots, x^n, z) \longrightarrow (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0, z).$$

Atunci $\mathbf{R}^{n+1}$ este o subvarietate anti-invariantă a lui $\mathbf{R}^{2n+1}$.

8 Subvarietăţi C-total reale

O subvarietate n-dimensională M a lui $\widetilde{M}$ normală la ξ se numeşte *subvarietate C-total reală*. În acest caz, avem $\phi T_x M \subset T_x^{\perp} M$, $\forall x \in M$ [48].

În particular, dacă $m = n$, M se numeşte *subvarietate C-lagrangeană*.

Observaţie. Unii geometri nu utilizează termenul de *subvarietăţi C-total reale*. Astfel de subvarietăţi sunt numite *subvarietăţi anti-invariante normale la câmpul vectorial de structură*.

Se ştie că

$$\begin{cases} A_\xi = 0, \\ A_{\phi X} Y = A_{\phi Y} X, \end{cases}$$

pentru orice câmpuri vectoriale X şi Y tangente la M.

Propoziţie [3]**.** *Fie M^n o subvarietate C-total reală a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}$. Dacă forma a doua fundamentală a lui M este paralelă, atunci $A_{\phi X} = 0$ pentru orice câmp vectorial X tangent la M. Mai mult, dacă $n = m$, atunci M este total geodezică în $\widetilde{M}$.*

Unele proprietăţi sunt exemplificate şi prin teorema:

Teoremă [46]. *Fie M o suprafaţa C-total reală cu vectorul curbură medie paralel a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^5(c)$.*

(1) *dacă M este de gen zero, atunci M este total geodezică.*

(2) *dacă M este o suprafaţă completă cu curbură nenegativă, atunci M este total geodezică sau plată.*

(3) *dacă M este o suprafaţă completă cu curbura Gauss K nepozitivă şi dacă $\dfrac{c+3}{4} - K \geq \alpha$ pentru orice constantă $\alpha > 0$, atunci M este plată.*

Exemple de subvarietăţi C-total reale:

1. Fie $\mathbf{C}^{n+1}$ spaţiul complex $(n+1)$-dimensional cu structura aproape complexă J şi S^{2n+1}sfera unitară din $\mathbf{C}^{n+1}$cu structura Sasaki standard (ϕ, ξ, η, g). Fie S^1 un cerc de rază 1, şi considerăm

$$T^n = S^1 \times \cdots \times S^1.$$

Atunci putem construi o imersie izometrică minimală a lui T^n din S^{2n+1} care este C-total reală conform demonstraţiei de mai jos.

Fie $X\colon T^n \longrightarrow S^{2n+1}$ o imersie minimală definită prin

$$X = \frac{1}{\sqrt{n+1}}(\cos u^1, \sin u^1, \ldots, \cos u^n, \sin u^n, \cos u^{n+1}, \sin u^{n+1}),$$

unde $u^{n+1} = -(u^1 + \cdots + u^n)$. Câmpul vectorial de structură ξ al lui S^{2n+1}, restricţionat la T^n este dat de

$$\xi = -JX = \frac{1}{\sqrt{n+1}}(\sin u^1, -\cos u^1, \ldots, \sin u^{n+1}, -\cos u^{n+1}).$$

Punând $X_i = \dfrac{\partial X}{\partial u^i}$, cu $i = 1, \ldots, n$, avem

$$X_i = \frac{1}{\sqrt{n+1}}(0, \ldots, 0, -\sin u^i, \cos u^i, 0, \ldots, 0, \sin u^{n+1}, -\cos u^{n+1}).$$

Astfel $X_1, \ldots, X_n$ sunt linear independenţi şi $\eta(X_i) = 0$ pentru $i = 1, \ldots, n$, ceea ce arată că imersia X este C-total reală. Mai mult, X este imersie minimală cu $\|h\|^2 = n(n-1)$.

2. Torul $T = S^1 \times S^1$ este o suprafaţă C-total reală a lui S^5 şi avem $\|h\|^2 = 2$.

Teoremă. *Fie M^n o subvarietate C-total reală, compactă cu vectorul curbură medie paralel a lui $S^{2n+1}(n > 1)$. Dacă $\|h\|^2 = \dfrac{n(n+1)}{2n-1}$, atunci M este $S^1 \times S^1 \subset S^5$ în S^{2m+1}.*

9 CR-subvarietăţi de contact

Fie M o subvarietate tangentă la câmpul vectorial de structură ξ imersată izometric într-o varietate Sasaki $\widetilde{M}$. Atunci M se numeşte *CR subvarietate de contact* a lui $\widetilde{M}$ dacă există o distribuţie diferenţiabilă

$$\mathcal{D}: x \longrightarrow \mathcal{D}_x \subset T_xM$$

pe M satisfăcând următoarele condiţii:

(1) $\mathcal{D}$ este invariantă în raport cu ϕ, i.e. $\phi\mathcal{D}_x \subset \mathcal{D}_x$ pentru fiecare $x \in M$,

(2) distribuţia ortogonală complementară $\mathcal{D}^\perp: x \longrightarrow \mathcal{D}_x^\perp \subset T_xM$ este anti-invariantă în raport cu ϕ, i.e. $\phi\mathcal{D}_x^\perp \subset T_x^\perp M$ pentru fiecare $x \in M$.

Punem

$$\begin{cases} \dim \widetilde{M} = 2m+1, & \dim M = n+1, \\ \dim \mathcal{D} = h, & \dim \mathcal{D}^\perp = p, \end{cases}$$

şi

$$\text{codim } M = 2m - n = q.$$

Dacă $p = 0$, atunci CR-subvarietatea de contact este o subvarietate invariantă a lui $\widetilde{M}$, şi dacă $h = 0$, atunci M este o subvarietate anti-invariantă din $\widetilde{M}$ tangentă la câmpul vectorial de structură ξ. Dacă $p = q$, atunci CR-subvarietate de contact M se numeşte *CR-subvarietate generică* a lui $\widetilde{M}$. În acest caz, $\phi T_x^\perp M \subset T_xM$ pentru orice punct $x \in M$. Dacă $h > 0$ şi $p > 0$, atunci CR-subvarietatea de contact se numeşte *non-trivială (proprie)*.

De asemenea, pentru o CR-subvarietate de contact M, subfibratul complex

$$\mathcal{B} = \{X - i\phi X;\ X \in \Gamma(\mathcal{D})\}$$

este involutiv. Astfel M este dotată cu o structură *Cauchy-Riemann* în sensul lui S. Greenfield [48].

Notăm cu $\mathcal{D}$ subfibratul complementar ortogonal la $\mathcal{D}^\perp \oplus \{\xi\}$ al lui TM, unde $\{\xi\}$ este subfibratul 1-dimensional generat de ξ.

Dacă $\mathcal{D}$ este invariant prin ϕ, atunci M se numeşte *CR-subvarietate* [48].

Fie $\widetilde{M}^{2m+1}$ o varietate Sasaki cu structura tensorială (ϕ, ξ, η, g). Vom considera o varietate riemanniană M izometric imersată în $\widetilde{M}$ cu câmpul metric tensorial indus g, şi presupunem că subvarietatea M a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}$ este tangentă la câmpul vectorial de structură ξ.

Pentru orice câmp vectorial X tangent la M, considerăm

$$\phi X = PX + FX,$$

unde PX este partea tangentă a lui ϕX şi FX partea normală a lui ϕX. Similar, pentru orice câmp vectorial V, normal la M,

$$\phi V = tV + fV,$$

unde tV este partea tangentă a lui ϕV şi fV partea normală a lui ϕV.

Este simplu de observat că P şi f sunt antisimetrice. Avem

$$g(FX, V) + g(X, tV) = 0$$

şi

$$\begin{cases} P^2 = -I - tF + \eta \otimes \xi, \qquad FP + fP = 0, \\ Pt + tf = 0, \qquad f^2 = -I - Ft. \end{cases}$$

Teoremă. *O subvarietate M tangentă la câmpul vectorial de structură ξ a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}$ este CR-subvarietate de contact dacă şi numai dacă $FP = 0$.*

Teoremă. *Fie M o CR-subvarietate de contact a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}$. Atunci P este o f-structură pe M şi f este o f-structură pe fibratul normal.*

Legatura dintre o CR-subvarietate de contact şi distribuţie este dată de teoremele [48]:

Teoremă. *Fie M^{n+1} o CR-subvarietate de contact a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}$. Atunci distribuţia $\mathcal{D}^\perp$ este complet integrabilă şi subvarietatea maximală integrală este o subvarietate anti-invariantă q-dimensională a lui $\widetilde{M}$ normală la ξ sau o subvarietate anti-invariantă $(q+1)$-dimensională a lui $\widetilde{M}$ tangentă la ξ.*

Teoremă. *Fie M^{n+1} o CR subvarietate de contact a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}^{2m+1}$. În acest caz, distribuţia $\mathcal{D}$ este complet integrabilă dacă şi numai dacă $h(X, PY) = h(Y, PX)$ pentru orice câmpuri vectoriale $X, Y \in \mathcal{D}$ şi atunci $\xi \in \mathcal{D}$. Mai mult, subvarietatea integrală maximală a lui $\mathcal{D}$ este o subvarietate invariantă $(n+1-q)$-dimensională a lui $\widetilde{M}$.*

Exemple de CR-subvarietăţi de contact şi subvarietăţi generice:

1. Fie S^{2m+1} sfera unitate $(2m+1)$-dimensională cu structura Sasaki (ϕ, ξ, η, g). Notăm $S^m(r)$ sfera m-dimensională de rază r. Considerăm următoarele imersii:

$$M_{m_1,\ldots,m_k} \overset{\text{not.}}{=} S^{m_1}(r_1) \times \cdots \times S^{m_k}(r_k) \longrightarrow S^{n+k}, \qquad n+1 = \sum_{i=1}^{k} m_i,$$

unde $m_1, \ldots, m_k$ sunt numere impare şi $r_1^2 + \cdots + r_k^2 = 1$.

$M_{m_1,\ldots,m_k}$ este o subvarietate generică a lui S^{n+k} cu forma a doua fundamentală paralelă şi cu conexiunea normală plată. Mai mult, $M_{m_1,\ldots,m_k}$ este o CR-subvarietate de contact a lui $S^{2m+1}(2m+1 > n+k)$ cu forma a doua fundamentală paralelă şi conexiunea normală plată.

2. În exemplul precedent, dacă $r_i = \left(\dfrac{m_i}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(i = 1, \ldots, k)$, atunci $M_{m_1,\ldots,m_k}$ este subvarietate generică minimală a lui S^{n+k} şi de asemenea o CR-subvarietate de contact minimală a lui S^{2m+1} $(2m+1 > n+k)$. Pătratul lungimii formei a doua fundamentale a lui M este dat de $\|h\|^2 = (n+1)(k-1)$, iar dacă $m_i = 1$, pentru toţi $i = 1, \ldots, k$ $(k = n+1)$, atunci $M_{m_1,\ldots,m_k}$ este subvarietate anti-invariantă a lui S^{2n+1}.

Teoremă [3]. *Fie M^{n+1} o CR subvarietate de contact, compactă din S^{2m+1} cu conexiunea normală plată. Dacă vectorul curbură medie al lui M este paralel şi dacă $PA_V = A_V P$, pentru orice câmp vectorial V normal la M, atunci M este S^{n+1} sau $S^{m_1}(r_1) \times \cdots \times S^{m_k}(r_k)$, $\quad n+1 = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i, \quad \sum\limits_{i} r_i^2 = 1, \quad 2 \leq k \leq n+1$, în S^{n+1+p}, unde $m_1, \ldots, m_k$ sunt numere impare.*

Fie $\widetilde{M}$ o varietate Sasaki $(2m+1)$-dimensională. O subvarietate M tangentă la ξ se numeşte *subvarietate generică* dacă subspaţiile invariante maximale prin ϕ,

$$\mathcal{D}_x = T_x M \cap \phi T_x M \subset T_x M, \; x \in M,$$

definesc un subfibrat diferenţiabil al lui TM.

Este ştiut că o astfel de subvarietate este înzestrată cu o CR-structură naturală [45].

10 Subvarietăţi oblice

Fie M o subvarietate riemanniană n-dimensională, izometric imersată într-o varietate metrică aproape de contact $\widetilde{M}$, cu structura metrică aproape de contact (ϕ, ξ, η, g).

Presupunem că câmpul vectorial de structură ξ este tangent la M.

Notăm cu $\mathcal{D}$ distribuţia ortogonală la ξ din TM şi considerăm descompunerea ortogonală directă

$$TM = \mathcal{D} \oplus \langle \xi \rangle .$$

Pentru orice vector $X \in TM$, scriem

$$\phi X = TX + NX,$$

unde TX (respectiv NX) este componenta tangentă (respectiv normală) a lui ϕX.

Similar, pentru orice $V \in T^{\perp}M$, avem

$$\phi V = tV + nV,$$

unde tV (respectiv nV) este componenta tangentă (respectiv normală) a lui ϕV.

Dându-se reperul local ortonormat $\{e_1, \ldots, e_n\}$ din $\mathcal{D}$, se defineşte *pătratul normei lui* T şi N prin

$$\|T\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g^2(e_i, Te_j), \qquad \|N\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \|Ne_i\|^2$$

respectiv. Este uşor de observat că $\|T\|^2$ şi $\|N\|^2$sunt independente de alegerea reperului ortonormat de mai sus.

Pentru fiecare vector X nenul, tangent la M în x, astfel încât X este ortogonal pe ξ_x, notăm cu $\theta(X)$ unghiul dintre ϕX şi T_xM. Deoarece $\eta(X) = 0$, $\theta(X)$ coincide cu unghiul dintre ϕX şi $\mathcal{D}_x$.

Atunci, M se numeşte *oblică* [27] dacă unghiul $\theta(X)$ este constant şi independent de alegerea lui $x \in M$ şi $X \in T_xM - \langle \xi \rangle$. Unghiul θ al imersiei oblice se numeşte *unghi de oblicitate*.

Subvarietăţiile invariante şi anti-invariante sunt oblice cu $\theta = 0$ şi respectiv $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

O subvarietate oblică care nu este invariantă sau anti-invariantă se numeşte *oblică proprie*.

Datorită cercetărilor făcute de ”tripleta spaniolă” J.L. Cabrerizo, A. Carriazo şi L.M. Fernandez [5], [6], vom prezenta câteva rezultate remarcabile.
Teoremă. *Fie M o subvarietate a unei varietăţi metrice aproape de contact $\widetilde{M}$ astfel încât $\xi \in TM$. Atunci, M este oblică dacă şi numai dacă există o constantă $\lambda \in [0,1]$ astfel încât:*

$$T^2 = -\lambda I + \lambda \eta \otimes \xi.$$

Mai mult, dacă θ este unghiul de oblicitate al lui M, el satisface relaţia $\lambda = \cos^2\theta$.

Existenţa reperelor local ortonormate tangente şi normale a unei varietăţi metrice aproape de contact este dată de următoarele corolare:

Corolar. *Fie M^{m+1} o subvarietate a unei varietăţi metrice aproape de contact $\widetilde{M}^{2m+1}$, cu unghiul de oblicitate $\theta > 0$ şi $\{e_1, \ldots, e_m, \xi\}$ un reper local ortonormat pe TM. Atunci $\{(\cos\sec\theta)Ne_1, \ldots, (\cos\sec\theta)Ne_m\}$ este un reper local ortonormat pe $T^{\perp}M$.*

Corolar. *Fie M^3 o subvarietate oblică a unei varietăţi metrice aproape de contact $\widetilde{M}$ cu unghiul de oblicitate $\theta < \dfrac{\pi}{2}$. Pentru un câmp vectorial unitar tangent e_1 din M, ortogonal la ξ, punem $e_2 = (\sec\theta)Te_1$ şi $e_3 = \xi$. Atunci $e_1 = -(\sec\theta)Te_2$ şi $\{e_1, e_2, e_3\}$ este un reper local ortonormat pe TM.*

Corolar. *Fie M^3 o subvarietate proprie oblică a unei varietăţi metrice aproape de contact $\widetilde{M}^5$ cu unghiul de oblicitate θ. Pentru un câmp vectorial unitar tangent e_1 din M, ortogonal la ξ, considerăm vectorii $e_2 = (\sec\theta)Te_1$, $e_3 = \xi$, $e_4 = (\cos\sec\theta)Ne_1$, $e_5 = (\cos\sec\theta)Ne_2$. În aceste condiţii, $e_1 = -(\sec\theta)Te_2$ şi $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ este un reper local ortonormat pe TM, cu $\{e_1, e_2, e_3\}$ tangente la M şi $\{e_4, e_5\}$ normale la M. În plus,*

$$te_4 = -\sin\theta e_1, \quad ne_4 = -\cos\theta e_5, \quad te_5 = -\sin\theta e_2 \quad \text{şi} \quad ne_5 = \cos\theta e_4.$$

Definiţie. Reperul $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ definit mai sus, se numeşte *reper oblic adaptat.*

Propoziţie. *Fie M o subvarietate a unei varietăţi metrice aproape de contact $\widetilde{M}$, cu unghiul de oblicitate θ. Atunci, pentru orice $X, Y \in TM$ avem:*

$$g(TX, TY) = \cos^2\theta[g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)],$$
$$g(NX, NY) = \sin^2\theta[g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)].$$

Mai mult, în acest caz, dacă θ este unghiul de oblicitate al lui M, $\lambda = \cos^2\theta$.

Propoziţie. *Fie M o subvarietate a unei varietăţi metrice aproape de contact $\widetilde{M}$, cu unghiul de oblicitate $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci ($\widetilde{\phi} = (\sec\theta)T, \xi, \eta, g)$ este o structură aproape de contact pe $\widetilde{M}$.*

Exemple de subvarietăţi oblice:

1. Dacă M este o subvarietate oblică a unei varietăţi aproape hermitiene $\widetilde{M}$, atunci $M \times \mathbf{R}$ este o subvarietate oblică a varietăţii metrice aproape de contact $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$ cu structura produs uzuală.

2. Dacă M este o subvarietate oblică a unei varietăţi Kaehler $\widetilde{M}$, atunci $M \times \mathbf{R}$ este oblică într-o varietate Sasaki.

Propoziţie. *Fie M o subvarietate a unei varietăţi metrice de contact $\widetilde{M}$. Atunci, M este anti-invariantă dacă şi numai dacă distribuţia $\mathcal{D}$ este integrabilă.*

Din acest motiv, dacă M este o subvarietate oblică a unei varietăţi aproape hermitiene $M \times \mathbf{R}$, ea nu poate fi subvarietate oblică proprie a unei varietăţi metrice de contact.

3. Fie $(\mathbf{R}^{2m+1}, \phi_0, \xi, \eta, g)$ cu structura Sasaki uzuală dată de

$$\eta = \frac{1}{2}\left(dz - \sum_{i=1}^{m} y^i dx^i\right), \qquad \xi = 2\frac{\partial}{\partial z},$$
$$g = \eta \otimes \eta + \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{m}(dx^i \otimes dxi + dy^i \otimes dy^i)\right],$$
$$\phi_0\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i\frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i\frac{\partial}{\partial y^i}) + Z\frac{\partial}{\partial z}\right] = \sum_{i=1}^{m}\left(Y_i\frac{\partial}{\partial x^i} - X_i\frac{\partial}{\partial y^i}\right) + \sum_{i=1}^{m} Y_i y^i\frac{\partial}{\partial z},$$

unde (x^i, y^i, z^i), $i = 1, \ldots, m$ sunt coordonatele carteziene. Se ştie că

$$\left\{2\frac{\partial}{\partial y^i}, 2\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + y^i\frac{\partial}{\partial z^i}\right), \xi\right\}$$

este o bază ortonormată din $T\mathbf{R}^{2m+1}$, astfel încât are loc următoarea relaţie $\phi_0\left(2\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + y^i\frac{\partial}{\partial z^i}\right)$. O astfel de bază se numeşte ϕ_0-*bază*.

Dacă m este impar, definim endomorfismul ϕ_1 ca:

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m, Z) = (-X_2, X_1, \ldots, -X_m, X_{m-1,}Y_2, -Y_1, \ldots,$$
$$Y_m, -Y_{m-1},\ y^2X_1 - y^1X_2 + \cdots + y^mX_{m-1} - y^{m-1}X_m).$$

Este uşor de arătat că $(\mathbf{R}^{2m+1}, \phi_1, \xi, \eta, g)$ este varietate metrică aproape de contact. Cu toate acestea, $(\mathbf{R}^{2m+1}, \phi_1, \xi, \eta, g)$ nu este varietate metrică de contact. Vom obţine aceasta ca un caz particular al propoziţiei următoare.

Propoziţie. *Se consideră $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ o varietate metrică de contact. Dacă există o altă structură metrică aproape de contact $(\widetilde{\phi}, \xi, \eta, g)$ pe $\widetilde{M}$ astfel încât $(\widetilde{M}, \widetilde{\phi}, \xi, \eta, g)$ este varietate metrică de contact, atunci $\widetilde{\phi} = \phi$.*

Observaţie. Se poate demonstra că $(\mathbf{R}^{2m+1}, \phi_1, \xi, \eta, g)$ nu este normală, deoarece $[\phi_1, \phi_1] = 2d\eta \otimes \xi$. Mai mult, $2-$forma fundamentală ϕ_1 este închisă şi obţinem că :

$$g((\widetilde{\nabla}_X \phi_1)Y, Z) = -2\eta(X)d\eta(Z, \phi_1 Y) - \eta(Y)d\eta(Z, \phi_1 X) - 2\eta(Z)d\eta(X, \phi_1 Y),$$

pentru orice $X, Y, Z \in T\mathbf{R}^{2m+1}$.

4. Pentru orice constantă θ, definim $\phi_{0,\theta}$ şi $\phi_{1,\theta}$ prin

$$\begin{aligned} \phi_{0,\theta} &= (\cos\theta)\phi_0 + (\sin\theta)\phi_1, \\ \phi_{1,\theta} &= (\cos\theta)\phi_1 + (\sin\theta)\phi_0. \end{aligned}$$

Atunci $(\phi_{0,\theta}, \xi, \eta, g)$ şi $(\phi_{1,\theta}, \xi, \eta, g)$ sunt două structuri metrice aproape de contact pe $\mathbf{R}^{2m+1}$, pentru m impar.

5. În particular, dacă $m = 2$, atunci orice subvarietate invariantă M de dimensiune 3 din $(\mathbf{R}^5, \phi_0, \xi, \eta, g)$ (respectiv $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$) este o subvarietate oblică minimală (respectiv subvarietate oblică), cu unghiul de oblicitate θ al lui $(\mathbf{R}^5, \phi_{0,\theta}, \xi, \eta, g)$ (respectiv $(\mathbf{R}^5, \phi_{1,\theta}, \xi, \eta, g)$).

Teoremă [5]. *Presupunem că*

$$x(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v), f_4(u, v))$$

defineşte o suprafaţă oblică S din $\mathbf{C}^2$ cu structura Käehleriană uzuală, astfel încât $\dfrac{\partial}{\partial u}$ şi $\dfrac{\partial}{\partial v}$ sunt nenule şi perpendiculare. Atunci

$$y(u, v, t) = 2(f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v), f_4(u, v), t)$$

defineşte o subvarietate oblică 3-dimensională M a lui $(\mathbf{R}^5, \phi_0, \xi, \eta, g)$, astfel încât, dacă

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u} + \left(2f_3\frac{\partial f_1}{\partial u} + 2f_4\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial t}$$

şi

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial v} + \left(2f_3\frac{\partial f_1}{\partial v} + 2f_4\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial t},$$

atunci $\{e_1, e_2, \xi\}$ *este o bază ortogonală a fibratului tangent al subvarietăţii.*

Observaţie. Dacă S nu este total reală, atunci distribuţia generată prin e_1 şi e_2 nu este integrabilă, adică M nu poate fi un produs riemannian al lui S cu $\mathbf{R}$.

6. Pentru orice $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$x(u, v, t) = 2(u\cos\theta, u\sin\theta, v, 0, t)$$

defineşte o subvarietate oblică 3-dimensională, minimală cu unghiul de oblicitate θ şi curbura scalară $\tau = -\frac{\cos^2\theta}{3}$.

7. Pentru orice constantă k,

$$x(u, v, t) = 2(e^{ku}\cos u\cos v, e^{ku}\sin u\cos v, e^{ku}\cos u\sin v, e^{ku}\sin u\sin v, t)$$

defineşte o subvarietate oblică de dimensiune 3, cu unghiul de oblicitate $\theta = \arccos\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$, curbura scalară $\tau = \frac{-k^2}{3(1+k^2)}$ şi curbura medie neconstantă dată de $\|H\| = \frac{2e^{-ku}}{3\sqrt{1+k^2}}$. Din acest motiv, subvarietatea nu este minimală.

8. Pentru orice constantă k,

$$x(u, v, t) = 2(u, k\cos v, v, k\sin v, t)$$

defineşte o subvarietate oblică M cu unghiul de oblicitate $\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$, curbura scalară $\tau = \frac{-1}{3(1+k^2)}$ şi curbura medie constantă dată de $\|H\| = \frac{|k|}{3(1+k^2)}$. Mai mult, următoarele proprietăţi sunt echivalente:

(a) $k = 0$;
(b) M este invariantă;
(c) M este minimală;
(d) M are vectorul curbură medie paralel.

9. Fie k un număr pozitiv şi $(g(s), h(s))$ o curbă plană parametrizată canonic. Atunci

$$x(u, s, t) = 2(-ks\sin u, g(s), ks\cos u, h(s), t)$$

defineşte o subvarietate oblică proprie, nonminimală, plată cu unghiul de oblicitate $\theta = \arccos \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

10. Pentru orice $k > 0$,

$$x(u, v, w, s, t) = 2(u, v, k \sin w, k \cos w, kw, ks, k \sin s, k \cos s, t)$$

defineşte o subvarietate oblică, cu unghiul de oblicitate $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, al varietăţii $(\mathbf{R}^9, \phi_0, \xi, \eta, g)$.

11. Pentru orice $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$x(u, v, w, s, t) = 2(u, 0, w, 0, v \cos\theta, v \sin\theta, s \cos\theta, s \sin\theta, t)$$

defineşte o subvarietate oblică 5-dimensională minimală, cu unghiul de oblicitate θ, a lui $(\mathbf{R}^9, \phi_0, \xi, \eta, g)$.

12. Pentru orice $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$x(u, v, t) = 2(u, 0, 0, v \cos\theta, v \sin\theta, 0, t)$$

defineşte o subvarietate oblică 3-dimensională minimală cu unghiul de oblicitate θ a lui $\mathbf{R}^7$ cu structura Sasaki uzuală.

13. Pentru orice numere reale nenule p şi q, considerăm următoarea imersie de la $\mathbf{R} \times (0, \infty) \times \mathbf{R}$ la $\mathbf{R}^5$ definită prin

$$x(u, v, t) = 2(pv \sin u, pv \cos u, v \sin qu, v \cos qu, t).$$

Atunci imersia x ne dă o subvarietate oblică 3-dimensională a varietăţii metrice aproape de contact $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$.

14. Pentru orice $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$x(u, v, t) = 2(u \cos\theta, v, u \sin\theta, 0, t)$$

defineşte o subvarietate oblică minimală, cu unghiul de oblicitate θ, a lui $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$.

15. Pentru orice $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$x(u, v, t) = 2(u \cos\theta, v, 0, u \sin\theta, t)$$

defineşte o subvarietate oblică minimală, cu unghiul de oblicitate θ al varietăţii $(\mathbf{R}^5, \phi_1, \xi, \eta, g)$.

În raport cu exemplul 15, se poate arăta că pentru orice $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, obţinem de asemenea o subvarietate oblică a lui $(\mathbf{R}^5, \phi_0, \xi, \eta, g)$, cu unghiul de oblicitate $\frac{\pi}{2} - \theta$. Din acest motiv, dacă $\theta = \frac{\pi}{4}$, atunci avem două imersii oblice de două varietăţi metrice aproape de contact diferite, cu acelaşi unghi de oblicitate.

16. Pentru orice $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$x(u, v, t) = 2(u, 0, v\cos\theta, v\sin\theta, 2uv\cos\theta + t)$$

defineşte o subvarietate oblică cu unghiul de oblicitate θ în $\mathbf{R}^5$.

11 Subvarietăţi 2-oblice

Spunem că M este *subvarietate* 2-*oblică* [27] a lui $\widetilde{M}$, dacă există două distribuţii ortogonale $\mathcal{D}_1$ şi $\mathcal{D}_2$ pe M astfel încât:

(i) TM admite descompunerea directă ortogonală: $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \langle\xi\rangle$;

(ii) pentru orice $i = 1, 2$, $\mathcal{D}_i$ este distribuţie oblică cu unghiul de oblicitate θ_i.

Dându-se o subvarietate 2-oblică M, pentru orice $X \in TM$,

$$X = P_1X + P_2X + \eta(X)\xi,$$

unde cu P_iX notăm componenta lui X din $\mathcal{D}_i$, pentru orice $i = 1, 2$.

În particular, dacă $X \in \mathcal{D}_i$, obţinem $T_i = P_i \circ T$, şi avem

$$\phi X = T_1X + T_2X + NX,$$

pentru orice $X \in TM$. Găsim

$$T_i^2 X = -\cos^2\theta_i X,$$

pentru orice $X \in \mathcal{D}_i$.

Observaţie. Fie d_1 (respectiv d_2) dimensiunile distribuţiilor $\mathcal{D}_1$ (respectiv $\mathcal{D}_2$). Dacă unul dintre d_1 şi d_2 sunt nule, subvarietatea 2-oblică este subvarietate oblică. Astfel, subvarietăţile oblice (adică subvarietăţile invariante şi anti-invariante) sunt cazuri particulare de subvarietăţi 2-oblice.

Observaţie. O CR-subvarietate de contact este un caz particular de subvarietate 2-oblică.

Exemple de subvarietăţi 2-oblice:

1. Pentru orice $\theta_1, \theta_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$x(u, v, w, s, t) = 2(u, 0, w, 0, v\cos\theta_1, v\sin\theta_1, s\cos\theta_2, s\sin\theta_2, t)$$

defineşte o subvarietate 5-dimensională 2-oblică M, cu unghiurile de oblicitate θ_1 şi θ_2, în $\mathbf{R}^9$ cu structura Sasaki uzuală (ϕ_0, ξ, η, g).

În plus, este uşor de vazut că

$$e_1 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad e_2 = \cos\theta_1\left(2\frac{\partial}{\partial y^1}\right) + \sin\theta_1\left(2\frac{\partial}{\partial y^2}\right),$$

$$e_3 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^3} + y^3\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad e_4 = \cos\theta_2\left(2\frac{\partial}{\partial y^3}\right) + \sin\theta_2\left(2\frac{\partial}{\partial y^4}\right),$$

$$e_5 = 2\frac{\partial}{\partial z} = \xi$$

formează un reper local ortonormat din TM.

Se definesc distribuţiile $\mathcal{D}_1 = \langle e_1, e_2\rangle$ şi $\mathcal{D}_2 = \langle e_3, e_4\rangle$. Atunci, este clar că $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \langle\xi\rangle$ şi este uşor de demonstrat că $\mathcal{D}_i$ este o distribuţie oblică cu unghiul de oblicitate θ_i, pentru orice $i = 1, 2$. În particular, dacă vom considera $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ca mai sus, rezultă că M este o $\theta-$subvarietate oblică.

2. Pentru orice $\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alegem $\theta_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, astfel încât $\cos\theta_2 = \frac{\cos\theta_1}{\sqrt{2}}$. Atunci

$$x(u, v, w, s, t) = 2(u, 0, w, 0, v\cos\theta_1, v\sin\theta_1, s\cos\theta_2, s\sin\theta_2, t)$$

defineşte o subvarietate 2-oblică 5-dimensională M a lui $(\mathbf{R}^9, \phi_0, \xi, \eta, g)$, cu amândouă unghiurile de oblicitate egale cu θ_2, dar nu este subvarietate oblică. De fapt putem alege un reper local ortonormat $\{e_1, \ldots, e_5\}$ din TM astfel încât

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1\frac{\partial}{\partial z}\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial x^4} + y^4\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\},$$
$$e_2 = \cos\theta_1\left(2\frac{\partial}{\partial y^1}\right) + \sin\theta_1\left(2\frac{\partial}{\partial y^2}\right),$$

$$e_3 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^3} + y^3\frac{\partial}{\partial z}\right),$$
$$e_4 = \cos\theta_2\left(2\frac{\partial}{\partial y^3}\right) + \sin\theta_2\left(2\frac{\partial}{\partial y^4}\right),$$
$$e_5 = 2\frac{\partial}{\partial z} = \xi.$$

Acum definim distribuţiile $\mathcal{D}_1 = \langle e_1, e_2\rangle$ şi $\mathcal{D}_2 = \langle e_3, e_4\rangle$. Este uşor de văzut că împreună $\mathcal{D}_1$ şi $\mathcal{D}_2$ sunt distribuţii oblice cu acelaşi unghi de oblicitate θ_2. Cu toate acestea, obţinem că M nu este oblică deoarece $\theta_2 \neq 0$.

3. $x(u, v, w, s, t) = 2(u, 0, w, u, 0, v, 0, s, t)$ defineşte o subvarietate 2-oblică 5-dimensională M a lui $(\mathbf{R}^9, \phi_0, \xi, \eta, g)$.

Propoziţie [6]. *Fie M o subvarietate 2-oblică cu unghiurile $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Dacă $g(\phi X, Y) = 0$, pentru orice $X \in \mathcal{D}_1$ şi $Y \in \mathcal{D}_2$, atunci M este oblică cu unghiul θ.*

De asemenea, subvarietăţile 2-oblice sunt o generalizare a subvarietăţilor semi-invariante, introduse de Bejancu şi Papaghiuc în [1]. În această lucrare, M se numeşte *subvarietate semi-invariantă* dacă există două distribuţii ortogonale $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{D}^\perp$ pe M, astfel încât:

(i) $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp \oplus \langle\xi\rangle$;

(ii) distribuţia $\mathcal{D}$ este invariantă, i.e. $\phi\mathcal{D} = \mathcal{D}$;

(iii) distribuţia $\mathcal{D}^\perp$ este anti-invariantă, i.e. $\phi\mathcal{D}^\perp \subset T^\perp M$.

Subvarietăţile semi-invariante cu unghiurile $\theta_1 = 0$ şi $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ sunt, de fapt, subvarietăţi 2-oblice. Reciproca este de asemenea adevărată.

Lemă. *Presupunem că există două distribuţii ortogonale $\mathcal{D}_1$ şi $\mathcal{D}_2$ pe M astfel încât $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \langle\xi\rangle$. Atunci $\mathcal{D}_1$ este invariantă dacă şi numai dacă este oblică cu unghiul de oblicitate $\theta_1 = 0$. Mai mult, $TX = T_2X$ pentru orice $X \in \mathcal{D}_1$.*

Observaţie. În condiţiile de mai sus, dacă $\mathcal{D}_2$ este o distribuţie anti-invariantă, atunci ea este oblică cu unghi $\dfrac{\pi}{2}$. Reciproca nu este adevărată, ceea ce se poate arăta punând $\theta_1 = \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ în exemplul 2. Astfel, dacă scriem $\mathcal{D}_1 = \langle e_3, e_4\rangle$ şi $\mathcal{D}_2 = \langle e_1, e_2\rangle$, obţinem o subvarietate M dotată cu două distribuţii ortogonale astfel încât $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \langle\xi\rangle$. $\mathcal{D}_2$ este oblică cu unghi $\dfrac{\pi}{2}$ dar nu este anti-invariantă, deoarece $\phi_0 e_1$ nu este normală la M.

Teoremă [5]. *Fie M o subvarietate 2-oblică a unei varietăţi metrice aproape de contact $\widetilde{M}$, $\mathcal{D}_1$ şi $\mathcal{D}_2$ distribuţii pe M cu θ_1 şi θ_2 unghiurile de oblicitate. Atunci pentru $i = 1, 2$*

$$T_i^2 X = -\cos^2 \theta_i X$$

pentru orice $x \in \mathcal{D}_i$.

12 Subvarietăţi semioblice

Prezentăm alte rezultate cu privire la subvarietăţile semioblice [27], [5], [6].

Definiţie. S se numeşte subvarietate *semioblică* [27] dacă există pe S două distribuţii ortogonale diferenţiabile $\mathcal{D}_1$ şi $\mathcal{D}_2$ astfel încât $TS = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$, unde $\mathcal{D}_1$ este o distribuţie complexă $(J(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_1)$ şi $\mathcal{D}_2$ este o distribuţie oblică cu unghiul de oblicitate $\theta \neq 0$.

În particular, dacă $\dim \mathcal{D}_1 = 0$ şi $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$, atunci se obţin subvarietăţi oblice proprii ale unei varietăţi aproape hermitiene, introduse de B.Y. Chen [10].

De fapt, prin studierea a două exemple clasice, putem găsi câteva relaţii între subvarietăţile oblice ale unei varietăţi aproape metrice de contact şi subvarietăţi semioblice ale unei varietăţi aproape hermitiene.

Subvarietăţile semioblice extind CR-subvarietăţile (definite de Bejancu), în sensul că distribuţia $\mathcal{D}^\perp$ perpendiculară pe distribuţia invariantă $\mathcal{D}$, nu este total reală, deoarece unghiul de oblicitate $\theta \neq 0$.

Observaţie. O CR-subvarietate de contact este un caz particular de subvarietate semioblică.

Exemple de subvarietăţi semioblice:

1. Fie $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ o varietate metrică aproape de contact. Vom considera varietatea $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$. Notăm $\left(X, f\dfrac{d}{dt}\right)$ un câmp vectorial pe $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$, unde X este tangent la $\widetilde{M}$, t este coordonată pe $\mathbf{R}$ şi f este o funcţie diferenţiabilă pe $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$. Pe această varietate se defineşte o structură aproape complexă J dată de

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right).$$

Atunci, $(\widetilde{M} \times \mathbf{R}, J, g_1)$ este varietate aproape hermitiană, unde g_1 reprezintă metrica produs $g_1\left(\left(X, f\dfrac{d}{dt}\right), \left(Y, h\dfrac{d}{dt}\right)\right) = g(X, Y) + fh$.

Următoarele rezultate arată cum putem obţine subvarietăţi semioblice în $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$ pornind de la subvarietăţi oblice ale lui $\widetilde{M}$.

Teoremă. *Fie M o subvarietate neinvariantă oblică a unei varietăţi metrice aproape de contact $\widetilde{M}$. Atunci $M \times \mathbf{R}$ este subvarietate semioblică a lui $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$, cu distribuţia complexă $\mathcal{D}_1 = \left\langle (\xi, 0), \left(0, \frac{d}{dt}\right) \right\rangle$ şi distribuţia oblică $\mathcal{D}_2 = \{(X \mid X \in \mathcal{D}\}$.*

Observaţie. Dacă M este subvarietate invariantă din $\widetilde{M}$, atunci $M \times \mathbf{R}$ este o subvarietate invariantă în $\widetilde{M} \times \mathbf{R}$.

2. Al doilea exemplu clasic a fost dat de Tashiro [44]. Fie $\widetilde{S}$ o varietate aproape Hermitiană cu structura aproape complexă J. Fie $\widetilde{M} \hookrightarrow \widetilde{S}$ o hipersuprafaţă orientabilă izometric imersată în $\widetilde{S}$. Notăm cu g metrica pe $\widetilde{S}$ şi cea indusă pe $\widetilde{M}$.

Fie C unitar normal la $\widetilde{M}$. Atunci, $\xi = -JC$ este tangent la $\widetilde{M}$. Se defineşte ϕ şi η prin $JX = \phi X + \eta(X)C$, pentru orice X tangent la $\widetilde{M}$. Este uşor de văzut că (ϕ, ξ, η, g) este o structură metrică aproape de contact pe $\widetilde{M}$.

Considerăm $S \hookrightarrow \widetilde{S}$ o imersie astfel încât C şi ξ sunt tangente la S. Notăm cu $\mathcal{D}_1 = \langle C, \xi \rangle$ distribuţia pe TS generată prin C şi ξ, iar cu $\mathcal{D}_2$ distribuţia ortogonală pe TS. Presupunem că există o hipersuprafaţă orientabilă $M \hookrightarrow S$, normală la C, şi o imersie $M \hookrightarrow \widetilde{M}$ astfel încât următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \hookrightarrow & \widetilde{S} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \hookrightarrow & S \end{array}$$

Este clar că M este invariantă dacă şi numai dacă S este subvarietate complexă.

Teoremă. *În condiţiile de mai sus, M este subvarietate oblică a lui $\widetilde{M}$, cu unghiul de oblicitate $\theta \neq 0$, dacă şi numai dacă S este subvarietate semioblică a lui $\widetilde{S}$, cu distribuţia complexă $\mathcal{D}_1$ şi distribuţia $\theta-$oblică $\mathcal{D}_2$.*

3. Fie $\mathbf{R}^6$ spaţiul euclidian de dimensiune 6, cu metrica standard şi structura aproape complexă dată de $J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}$, pentru orice $i = 1, 2, 3$, unde (x^i, y^i) reprezintă coordonatele carteziene.

Fie $\mathbf{R}^5 \hookrightarrow \mathbf{R}^6$ imersia uzuală. Atunci $C = \frac{\partial}{\partial y^3}$ este unitar normal la $\mathbf{R}^5$ şi $\xi = -JC = \frac{\partial}{\partial x^3}$.

Acum, pentru orice $\theta \neq 0$, putem considera imersiile:

$$\varphi_1 : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^6 : (u,v,t,s) \longmapsto (u\cos\theta, u\sin\theta, t, v, 0, s),$$
$$\varphi_2 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^5 : (u,v,t) \longmapsto (u\cos\theta, u\sin\theta, t, v, 0).$$

Se poate demonstra direct că φ_1 este o imersie semioblică, cu distribuţia complexă $\mathcal{D}_1 = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^3}, \dfrac{\partial}{\partial y^3} \right\rangle$ şi distribuţia oblică

$$\mathcal{D}_2 = \left\langle \cos\theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y^1} \right\rangle,$$

de unghi θ. Pe de altă parte, φ_2 este o θ-imersie oblică, unde $\mathbf{R}^5$ are structura metrică aproape de contact indusă de structura aproape hermitiană pe $\mathbf{R}^6$.

Observaţie. De fapt, subvarietăţile semioblice sunt cazuri particulare de subvarietăţi 2-oblice. Mai mult, dacă $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, atunci subvarietatea semioblică este o subvarietate semi-invariantă. Pe de altă parte, dacă notăm dimensiunea lui $\mathcal{D}_i$ prin d_i, pentru $i = 1, 2$, avem următoarele cazuri:

(i) dacă $d_2 = 0$, atunci M este subvarietate invariantă;

(ii) dacă $d_1 = 0$ şi $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, atunci M este subvarietate anti-invariantă;

(iii) dacă $d_1 = 0$ şi $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$, atunci M este subvarietate oblică proprie, cu unghiul de oblicitate θ.

Spunem că subvarietatea semioblică este *proprie* dacă $d_1 d_2 \neq 0$ şi $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$.

4. Pentru orice $\theta_1 = 0$ şi $\theta_2 = \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$x(u,v,w,s,t) = 2(u, 0, w, 0, v, 0, s\cos\theta, s\sin\theta, t)$$

defineşte o subvarietate semioblică proprie M, cu unghi oblic θ din $\mathbf{R}^9$ cu structura Sasaki uzuală (ϕ_0, ξ, η, g).

Dându-se o subvarietate semioblică M, notăm cu P_i proiecţia pe distribuţia $\mathcal{D}_i$, pentru orice $i = 1, 2$. De asemenea, punând $T_i = P_i \circ T$, obţinem

$$\phi X = \phi P_1 X + T P_2 X + N P_2 X,$$

pentru orice $X \in TM$.

Teoremă. *Fie M o subvarietate a unei varietăţi metrice aproape de contact $\widetilde{M}$ astfel încât $\xi \in TM$. Atunci, M este semioblică dacă şi numai dacă există $\lambda \in [0, 1)$ astfel încât:*

(i) $\mathcal{D} = \{X \in \mathcal{D} \mid T^2X = -\lambda X\}$ *este o distribuţie;*
(ii) *pentru orice* $X \in TM$*, ortogonal la* $\mathcal{D}$*,* avem $NX = 0$.
În plus, în acest caz, $\lambda = \cos^2\theta$*, unde* θ *este unghiul de oblicitate al lui* M*.*

Observaţie. Pentru orice $X \in \mathcal{D}_1$, $g([X, \phi X], \xi) \neq 0$.

Dacă M o subvarietate semioblică a unei varietăţi Sasaki $\widetilde{M}$ astfel încât $d_1 \neq 0$. Atunci, distribuţia invariantă $\mathcal{D}_1$ nu este integrabilă.

Propoziţie. *Fie* M *o subvarietate semioblică a unei varietăţi Sasaki* $\widetilde{M}$*. Atunci distribuţia oblică* $\mathcal{D}_2$ *este integrabilă dacă şi numai dacă* M *este subvarietate semi-invariantă.*

Condiţiile de integrabilitate a distribuţiilor sunt date de:

Propoziţie. *Fie* M *o subvarietate semioblică a unei varietăţi Sasaki* $\widetilde{M}$*. Atunci avem:*
(i) *distribuţia* $\mathcal{D}_1 \oplus \langle\xi\rangle$ *este integrabilă dacă şi numai dacă*

$$h(X, \phi Y) = h(Y, \phi X),$$

pentru orice $X, Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle\xi\rangle$*.*
(ii) *distribuţia* $\mathcal{D}_2 \oplus \langle\xi\rangle$ *este integrabilă dacă şi numai dacă*

$$P_1(\nabla_X TY - \nabla_Y TX) = P_1(A_{NY}X - A_{NX}Y),$$

pentru orice $X, Y \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle\xi\rangle$*.*

Fie M o subvarietate semioblică proprie cu unghiul de oblicitate θ. M se numeşte *varietate semioblică Sasaki* dacă

$$(\nabla_X T)Y = g(P_1X, Y)\xi - \eta(Y)P_1X + \cos^2\theta(g(P_2X, Y)\xi - \eta(Y)P_2X),$$

pentru orice $X, Y \in TM$*.*

Proprietăţi interesante sunt exemplificate de teoremele [5]:

Teoremă. *Fie* M *o subvarietate semioblică proprie, de unghi* θ*, a unei varietăţi Sasaki* $\widetilde{M}$*. Următoarele proprietăţi sunt echivalente:*
(i) M *este semioblică Sasaki;*
(ii) $(\nabla_X TP_2)Y = \cos^2\theta(g(P_2X, Y)\xi - \eta(Y)P_2X)$ *pentru orice* $X, Y \in TM$*.*

Corolar. *Dacă* M *este subvarietate semioblică proprie Sasaki, de unghi* θ *a unei varietăţi Sasaki* $\widetilde{M}$*, atunci*

$$\nabla_X Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle\xi\rangle\,, \qquad \nabla_X Z \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle\xi\rangle\,,$$

pentru orice $X, Y \in TM$, $Y \in \mathcal{D}_1$, $Z \in \mathcal{D}_2$. *În particular distribuţiile* $\mathcal{D}_1 \oplus \langle\xi\rangle$ *şi* $\mathcal{D}_2 \oplus \langle\xi\rangle$ *sunt integrabile.*

Teoremă. *Fie* M *o subvarietate semioblică proprie, de unghi* θ, *a unei varietăţi Sasaki* $\widetilde{M}$. *Presupunem* $\dim \mathcal{D}_2 = 2$. *Atunci, următoarele proprietăţi sunt echivalente:*

(i) M *este semioblică Sasaki;*
(ii) $(\nabla_X TP_2)Y = \cos^2\theta(g(P_2X, Y)\xi - \eta(Y)P_2X)$, *pentru orice* $X, Y \in TM$*;*
(iii) $\nabla_X Y \in \mathcal{D}_1 \oplus \langle\xi\rangle$, *pentru orice* $X \in TM$ *şi* $Y \in \mathcal{D}_1$;
(iv) $\nabla_X Y \in \mathcal{D}_2 \oplus \langle\xi\rangle$, *pentru orice* $X \in TM$ *şi* $Y \in \mathcal{D}_2$.

13 Invarianţi Chen. Inegalităţi Chen

În 1968, S.S. Chern [16] a formulat problema determinării condiţiilor necesare ca o varietate riemanniană (M, g) să admită o imersie izometrică minimală într-un spaţiu euclidian.

Până recent, erau cunoscute numai **condiţiile** următoare:

Condiţia 1. Nu există subvarietăţi minimale compacte într-un spaţiu euclidian.

Condiţia 2. Dacă M este o subvarietate minimală a unui spaţiu euclidian, atunci curbura Ricci este negativă.

În [11], B.Y. Chen a descoperit a treia condiţie necesară:

Condiţia 3. Dacă M este o subvarietate minimală a unui spaţiu euclidian, atunci curbura secţională a secţiunii plane $\pi \subset T_pM$, $p \in M$, satisface

$$K(\pi) \geq \tau(p),$$

pentru orice secţiune plană $\pi \subset T_pM$, $p \in M$, unde $\tau(p)$ este curbura scalară în punctul p.

Invarianţii Riemann dintr-o varietate Riemann sunt caracteristici intrinseci din acea varietate Riemann. În această secţiune, invarianţii Riemann de pe o varietate Riemann îi numim invarianţi Chen [14].

Fie M o varietate Riemann. Notăm cu $K(\pi)$ curbura secţională 2-secţiunii plane $\pi \subset T_pM$, $p \in M$.

Pentru orice bază ortonormată $\{e_1, ..., e_n\}$ a spaţiului tangent T_pM, curbura scalară τ în p se defineşte prin

$$\tau(p) = \sum_{i<j} K(e_i \wedge e_j).$$

Notăm $(\inf K)(p) = \inf\{K(\pi)|\ \pi \subset T_pM,\ \ \dim \pi = 2\}$.

Primul invariant Chen este dat de $\delta_M(p) = \tau(p) - (\inf K)(p)$.

Fie L un subspaţiu din T_pM de dimensiune $r \geq 2$ şi $\{e_1, ..., e_r\}$ o bază ortonormată din L. Se defineşte *curbura scalară* $\tau(L)$ a lui L prin

$$\tau(L) = \sum_{i<j} K(e_i \wedge e_j), \quad i, j = 1, ..., r.$$

Dându-se o bază ortonormată $\{e_1, ..., e_n\}$ din spaţiul tangent T_pM, notăm simplu $\tau_{1...r}$ *curbura scalară* a r-secţiunii plane generate de $e_1, ..., e_r$. Curbura scalară $\tau(p)$ a lui M este curbura scalară a spaţiului tangent la M în p. Dacă L este 2-secţiune plană, $\tau(L)$ este curbura secţională $K(L)$ a lui L.

Pentru un întreg $k \geq 0$, notăm $S(n, k)$ mulţimea finită de k-uple $(n_1, ..., n_k)$ de întregi ≥ 2 satisfăcând $n_1 < n, n_1 + ... + n_k \leq n$. Notăm $S(n)$ mulţimea de k-uple cu $k \geq 0$ pentru un n fixat.

Pentru fiecare k-uple $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$, Chen a introdus invariantul riemannian definit prin

$$\delta(n_1, ..., n_k)(p) = \tau(p) - S(n_1, ..., n_k)(p),$$

unde

$$S(n_1, ..., n_k)(p) = \inf\{\tau(L_1) + ... + \tau(L_k)\},$$

iar $L_1, ..., L_k$ parcurg toate k subspaţiile mutual ortogonale ale lui T_pM astfel încât $\dim L_j = n_j$, $j = 1, ..., k$.

Se defineşte *curbura Ricci* $\mathrm{Ric}_L(X)$ *a lui* L *în* X (sau mai simplu *curbura* $k-$*Ricci*) ca fiind

$$\mathrm{Ric}_L(X) = K_{12} + K_{13} + ... + K_{1k},$$

unde prin K_{ij} notăm *curbura secţională a* 2*-secţiunii plane generată de* e_i, e_j.

Pentru fiecare întreg k, $2 \leq k \leq n$, se defineşte un alt *invariant Riemannian* Θ_k al unei varietăţi n-dimensionale riemaniene M, ca fiind

$$\Theta_k(p) = \frac{1}{k-1} \inf_{L,X} \mathrm{Ric}_L(X), \quad p \in M.$$

Reamintim cea mai importantă **inegalitate Chen** obţinută pentru subvarietăţi din forme spaţiale reale.

Teoremă [7]. *Fie* M^n *o subvarietate* n*-dimensională* $(n \geq 3)$ *a unei forme spaţiale reale* $\widetilde{M}^m(c)$ *cu curbura secţională constantă* c*. Atunci*

$$(A) \qquad \delta_M \leq \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + (n+1)c\right\}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă, există un reper local ortonormat $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_m\}$ *astfel încât operatorii Weingarten au următoarea formă:*

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu - a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 & \cdots & 0 \\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$r = n + 2, ..., m$.

Mai mult, când egalitatea (A) *are loc într-un punct* $p \in M^n$, *avem de asemenea* $\inf K = K(e_1 \wedge e_2)$ *în* p.

Observaţie. În condiţiile teoremei de mai sus, notăm prin

$$A_r = A_{e_r}, \qquad h_{ij}^r = g(h(e_i, e_j), e_r),$$

pentru $i, j = 1, ..., n$, $r = n + 1, ..., m$.

Demonstraţia teoremei precedente se bazează pe lema algebrică [7].

Lemă. *Fie* $a_1, ..., a_n, b$ $(n \geq 2)$ *numere reale astfel încât*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 + b\right).$$

Atunci $2a_1a_2 \geq b$, *cu egalitatea dacă şi numai dacă* $a_1 + a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

Pentru fiecare $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$, considerăm:

$$d(n_1, ..., n_k) = \frac{n^2\left(n + k - 1 - \sum_{j=1}^{k} n_j\right)}{2\left(n + k - \sum_{j=1}^{k} n_j\right)},$$

$$b(n_1, ..., n_k) = \frac{1}{2}\left[n(n-1) - \sum_{j=1}^{k} n_j(n_j - 1)\right].$$

Următoarea inegalitate între invarianţii Chen şi pătratul curburii medii este obţinută în [15], jucând un rol important pentru aceast domeniu de cercetare.

Teoremă. *Pentru fiecare* $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$ *şi fiecare subvarietate* n*-dimensională* M *a unei forme spaţiale reale* $\widetilde{M}^m(c)$ *cu curbura secţională constantă* c, *avem*

$$(B) \qquad \delta(n_1, ..., n_k) \leq d(n_1, ..., n_k) \left\|H\right\|^2 + b(n_1, ..., n_k)c.$$

Cazul de egalitate în inegalitatea (B) *are loc într-un punct $p \in M$ dacă şi numai dacă există o bază ortonormată $\{e_1, ..., e_m\}$ în p astfel încât operatorii Weingarten ai lui M în $\widetilde{M}^m(c)$ în p au următoarea formă:*

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} A_1^r & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & \cdots & A_k^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_r & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mu_r \end{pmatrix},$$

$r = n+2, ..., m$, iar $a_1, ..., a_n$ satisfac

$$a_1 + \cdots + a_{n_1} = \cdots = a_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_1+\cdots+n_k} = a_{n_1+\cdots+n_k+1} = \cdots = a_n$$

şi fiecare A_j^r este o submatrice simetrică de tip $n_j \times n_j$ satisfăcând

$$\mathrm{trace}(A_1^r) = \cdots = \mathrm{trace}\,(A_k^r) = \mu_r.$$

Un important corolar al teoremei precedente este următorul principiu de maxim.

Principiul de Maxim [14]. *Fie M o subvarietate n-dimensională a unei forme spaţiale reale $\widetilde{M}^m(c)$. Dacă ea satisface cazul de egalitate al inegalităţii* (B), adică

$$(M) \qquad \delta(n_1, ..., n_k) = d(n_1, ..., n_k)\,\|H\|^2 + b(n_1, ..., n_k)c,$$

pentru un k-uplu $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$, atunci

$$\Delta_c(n_1, ..., n_k) \geq \Delta_c(m_1, ..., m_j)$$

pentru orice $(m_1, ..., m_j) \in S(n)$, unde

$$\Delta_c(n_1, ..., n_k) = \frac{\delta(n_1, ..., n_k) - b(n_1, ..., n_k)c}{d(n_1, ..., n_k)}.$$

Menţionăm o obstrucţie la existenţa imersiilor oblice, după cum urmează:

Teoremă [14]. *Fie (M, g) un spaţiu riemannian simplu conex şi compact, de* $\dim M = n$. *Dacă există întregii $n_1, ..., n_k \geq 2$, $n_1 < n$, $n_1 + ... + n_k \leq n$ astfel încât $\delta(n_1, ..., n_k) > 0$, atunci nu există $x\colon M \to \mathbf{C}^n$ (respectiv $x\colon M \to T^n$,unde T^n este torul complex) imersie oblică. În particular, nu există $x\colon M \to \mathbf{C}^n$ (respectiv $x\colon M \to T^n$) imersie lagrangeană.*

Observaţie. Condiţia $\delta(n_1, ..., n_k) > 0$ dată în teorema precedentă este optimă. Imersia lagrangeană a n-sferei unitate S^n a n-spaţiului complex euclidian $\mathbf{C}^n$ este cunoscută ca *imersie Whitney* şi se defineşte prin

$$\omega(y_0, y_1, ..., y_n) = \frac{1 + iy_0}{1 + y_0^2}(y_1, ..., y_n),$$

cu $y_0^2 + y_1^2 + ... + y_n^2 = 1$. Imersia Whitney are un unic punct de auto-intersecţie $\omega(-1, 0, ..., 0) = \omega(1, 0, ..., 0)$. S^n împreună cu metrica indusă pentru imersia Whitney ω se numeşte *n-sferă Whitney*.

Pentru orice n-uple $(n_1, ..., n_k) \in S(n, k)$, invariantul $\delta(n_1, ..., n_k)$ al n-sferei Whitney satisface $\delta(n_1, ..., n_k) \geq 0$ şi $\delta(n_1, ..., n_k) = 0$ numai în punctul de auto-intersecţie.

Acest exemplu arată că condiţia dată de teoremă este optimă.

14 Subvarietăţi ideale şi minimale

O subvarietate M a unei varietăţi riemanniene $\widetilde{M}$ se numeşte *subvarietate k-riglată* dacă M este foliată printr-o subvarietate total geodezică k-dimensională a lui $\widetilde{M}$. În particular, o subvarietate M a unui spaţiu euclidian $\mathbf{E}^m$ este k-riglată dacă este foliată prin subvarietăţi total geodezice k-dimensionale ale lui $\mathbf{E}^m$.

Dacă M este o subvarietate k-riglată n-dimensională în $\mathbf{E}^m$, atunci există o subvarietate $(n-k)$-dimensională N a lui M astfel încât M este generată printr-o translaţie de-a lungul subvarietăţii total geodezice k-dimensionale N. În particular, dacă subvarietatea total geodezică k-dimensională este normală la subvarietate N în fiecare punct din N, subvarietatea riglată M se numeşte *subvarietate k-riglată normală*.

Obţinem următoarele rezultate pentru subvarietăţi minimale ale spaţiilor euclidiene:

Teoremă [7]. *Fie M o subvarietate minimală n-dimensională ($n > 2$) a unui m-spaţiu Euclidean $\mathbf{E}^m$. Atunci*

i) *invariantul δ_M satisface $\delta_M \leq 0$.*

ii) *dacă $\delta_M = 0$, atunci în fiecare punct $p \in M$, avem unul din cazurile $\dim N(p) = n$ sau $\dim N(p) = n - 2$.*

În plus, dacă $\dim N(p) \equiv n$, atunci M este o subvarietate total geodezică a lui $\mathbf{E}^m$ şi dacă $\dim N(p) \equiv n - 2$, atunci M este o subvarietate $(n-2)$-riglată a lui $\mathbf{E}^m$.

În particular, dacă M este o subvarietate $(n-2)$-riglată normală, atunci M este o porţiune din următoarele subvarietăţi minimale ale lui $\mathbf{E}^m$:

a) *subvarietate produs $N \times \mathbf{E}^{n-2}$ cu N suprafaţa minimală în $\mathbf{E}^{m-n+2}$ şi un subspaţiu liniar $(n-2)$-dimensional $\mathbf{E}^{n-2}$ al lui $\mathbf{E}^m$.*

b) *subvarietate produs $CN \times \mathbf{E}^{n-3}$ cu CN con minimal 3-dimensional al lui $\mathbf{E}^{m-n+3}$ şi un subspaţiu liniar $(n-3)$-dimensional $\mathbf{E}^{n-3}$ al lui $\mathbf{E}^m$.*

c) *reciproc, dacă avem unul dintre cazurile a) sau b), atunci M satisface identic condiţia $\delta_M = 0$.*

Fie $x : M \to \widetilde{M}(c)$ o imersie izometrică a unei n-varietăţi riemanniane M a unei forme spaţiale reale $\widetilde{M}(c)$. Se demonstrează că

$$\|H\|^2(p) \geq \widehat{\Delta}_c(p), \quad p \in M,$$

unde $\widehat{\Delta}_c$ este invariantul riemannian din M definit prin $\widehat{\Delta}_c = \max \Delta_c(n_1, ..., n_k)$, şi $(n_1, ..., n_k)$ ia valori pentru toate elementele din $S(n)$.

Folosind inegalitatea precedentă, Chen introduce noţiunea de imersie ideală [14].

Definiţie. O imersie izometrică $x : M \to \widetilde{M}(c)$ a unei varietăţi riemanniene M într-o formă spaţială reală $\widetilde{M}(c)$ se numeşte *imersie ideală* dacă cazul de egalitate al inegalităţii de mai sus are loc peste tot pe M,

$$\|H\|^2(p) = \widehat{\Delta}_c(p), \ p \in M.$$

O definiţie echivalentă pentru subvarietăţi ideale este următoarea: o subvarietate se numeşte *subvarietate ideală* dacă cazul de egalitate al inegalităţii Chen are loc numai pentru un anumite k-uplu $(n_1, ..., n_k)$.

Observaţie (Interpretarea fizică a imersiilor ideale). "O imersie izometrică $x : M \to \widetilde{M}(c)$ este o imersie ideală" înseamnă că "M are în $\widetilde{M}(c)$ cel mai bun mod de viaţă"; în sensul că M primeşte cea mai mică tensiune posibilă (dată de $\widehat{\Delta}_c(p)$) din spaţiul înconjurător în fiecare punct p din M. Aceasta rezultă din inegalitatea precedentă şi din faptul că câmpul vectorial curbura medie este exact câmpul de tensiune pentru o imersie izometrică a unei varietăţi riemanniene în altă varietate riemanniană (ştiut din timpul lui Laplace). Adică, pătratul curburii medii într-un punct pe subvarietate măsoară exact tensiunea de-a lungul subvarietăţii primită din spaţiul înconjurător în fiecare punct.

Pricipiul de maxim ne dă următorul rezultat important:

Propoziţia 1. *Dacă o imersie izometrică $x : M \to \widetilde{M}(c)$ satisface egalitatea (M) pentru un k-uplu $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$, atunci ea este o imersie izometrică ideală.*

Din definiţia imersiilor ideale, deducem:

Propoziţia 2. *Fie* $x : M^2 \to \widetilde{M}^m(c)$ *o imersie izometrică a unei 2-varietăţi riemanniene în* $\widetilde{M}^m(c)$*. Atunci ea este o imersie ideală dacă şi numai dacă este o imersie total ombilicală.*

Dacă subvarietatea însăşi este formă spaţială reală, au loc următoarele:

Propoziţia 3. *Fie* $x : M(c') \to \widetilde{M}^m(c)$ *o imersie izometrică a unei forme spaţiale reale în* $\widetilde{M}^m(c)$*. Atunci ea este imersie ideală dacă şi numai dacă este imersie total ombilicală.*

Teoremă [11]**.** *Presupunem că* $x : M \to \mathbf{E}^m$ *este o imersie ideală a unei* n*-varietăţi riemanniane compacte* M *dintr-un* m*-spaţiu Euclidian cu codimensiune arbitrară. Cu* $B(R)$ *notăm bilele care conţin imaginea lui* M*. Atunci raza* R *a lui* $B(R)$ *satisface*

$$\text{(S)} \qquad R^2 \geq \frac{\operatorname{vol}(M)}{\displaystyle\int_M \widehat{\Delta}_0 dV},$$

unde $\widehat{\Delta}_0$ *este invariantul Riemann pe* M *definit de principiul de maxim şi* $\operatorname{vol}(M)$ *este volumul lui* M*.*

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă x *este imersie ideală de tip* 1*.*

Spunem că x este de *tip* 1 dacă $\Delta x = \lambda x$, cu $\lambda > 0$.

Estimarea razei tuturor bilelor conţinând subvarietăţi compacte ideale date de teorema precedentă este optimă.

Ca exemplu, fie M n-sfera unitate şi fie x imersia ideală definită de scufundarea standard a lui M în $\mathbf{E}^{n+1}$. Atunci invariantul intrinsec din partea dreaptă al inegalităţii (S) este egal cu unu. Pe de altă parte, toate bilele de rază 1 sunt conţinute în imaginea lui M.

Imersia ideală a unei varietăţi riemanniene într-o formă spaţială reală nu este unică în general.

Observaţie. Din definiţia lui $\Delta_c(n_1, ..., n_k)$, este ştiut că dacă $c' > c$, are loc $\widehat{\Delta}_{c'} < \widehat{\Delta}_c$ pentru fiecare varietate riemanniană M. Astfel, dacă M este o varietate riemanniană cu $\widehat{\Delta}_c < 0$ în câteva puncte din M, atunci M nu admite nici o imersie ideală în nici o formă spaţială riemanniană $\widetilde{M}^m(c')$, cu $c' > c$.

Observaţie. O n-sferă riemanniană cu curbura secţională constantă K admite o imersie ideală în orice formă spaţială riemanniană compactă, simplu conexă $\widetilde{M}^m(c)$ cu $c \leq K$ şi $m > n$.

Această observaţie arată că o varietate riemanniană poate admite o imersie ideală într-o formă spaţială riemanniană, dar nu admite orice imersie ideală în orice altă formă spaţială riemanniană.

Există numeroase subvarietăţi în forme spaţiale satisfăcând cazul de egalitate al inegalităţii (B) (a se vedea [15]).

Exemplul 1. Pentru orice *întreg* $k \in \left\{1, ..., \left[\dfrac{n}{2}\right]\right\}$, cilindrul sferic $\mathbf{E}^k \times S^{n-k}$ este o hipersuprafaţă a lui $\mathbf{E}^{n+1}$ care satisface egalitatea pentru $(n_1, ..., n_k) = (2, ..., 2)$.

Exemplul 2. Pentru fiecare număr par $n = 2k$, o subvarietate total umbilicală a lui $\widetilde{M}^m(c)$ satisface egalitatea cu $(n_1, ..., n_k) = (2, ..., 2)$. Subvarietatea total ombilicală a lui $\widetilde{M}^m(c)$ deasemenea, satisface egalitatea cu $k = 0$.

Exemplul 3. Dacă M este varietate Käehler şi admite o imersie minimală într-o formă spaţială reală $\widetilde{M}(c)$, cu $\dim M = n$ şi $\dim_{\mathbf{R}} \widetilde{M}(c) = 2n + 1$, atunci M este subvarietate $(2, ..., 2)$-ideală.

Exemplul 4. Fie $i : S^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \to \mathbf{E}^3$ imersia standard a sferei de rază $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Atunci $i \times i : S^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \to S^5 \subset \mathbf{E}^6$ este $(2, 2)$-imersie ideală.

Generalizare. Considerăm $a, b > 0$, $a^2 + b^2 = 1$ şi $i_1 \colon S^k(a) \to \mathbf{E}^{k+1}$, $i_2 \colon S^k(b) \to \mathbf{E}^{k+1}$ imersii standard. Atunci $i_1 \times i_2 \colon S^k(a) \times S^k(b) \to S^{2k+1} \subset \mathbf{E}^{2k+2}$ este $(2, ..., 2)$-imersie ideală.

O subvarietate M a unei varietăţi $\widetilde{M}$ este *subvarietate austeră* (sau *subvarietate Lawson*) dacă pentru orice $\xi \in \Gamma(T^{\perp}M)$ şi orice $\lambda \in \operatorname{Eig}(A_\xi)$ are loc $-\lambda \in \operatorname{Eig}(A_\xi)$.

Exemplul 5. Fie $B \subset S^{n+1}$ o subvarietate austeră de dimensiune pară $2k$. Pentru orice $p \in B$, notăm $N_pB = \{\xi \in T_pS^{n+1} |\ g(\xi, \xi) = 1, g(\xi, T_pB) = 0\}$.

Atunci $NB = \bigcup\limits_{p \in B} N_pB \subset S^{n+1}$ este o $(2, ..., 2)$-subvarietate ideală minimală.

Exemplul 6. Fie $N \subset S^{m-1} \subset \mathbf{E}^m$ o subvarietate minimală cu $\dim N = l$ şi fie CN conul $(l + 1)$-dimensional din $\mathbf{E}^m$ peste N cu centrul în centrul lui S^{m-1}. Atunci $CN \times \mathbf{E}^{n-l+1} \subset \mathbf{E}^m$ este o subvarietate ideală.

Exemplul 7. Considerăm spaţiul Minkowski $\mathbf{E}_1^{n+2} = (\mathbf{R}^{n+2}, <, >)$, cu metrica Lorentz $< x, y >= -x^1y^1 + x^2y^2 + \cdots + x^{n+2}y^{n+2}$, spaţiul hiperbolic $H^{n+1}(-1) = \left\{x \in \mathbf{E}_1^{n+2} |\ < x, x >= -1\right\}$ şi spaţiul-timp de Sitter $S_1^{n+1} =$

$\left\{x \in \mathbf{E}_1^{n+2} | < x, x >= 1\right\}$, iar $k \leq \dfrac{n}{2}$. Se defineşte

$N = \{x \in \mathbf{E}_1^{n+2} | (x^1)^2 - (x^2)^2 - \cdots - (x^{2k})^2 = 2, (x^{2k+1})^2 + \cdots + (x^{n+2})^2 = 1\}.$

Atunci $N \subset H^{n+1}(-1)$ este o hipersuprafaţă $(2, ..., 2)$-ideală.

Exemplul 8. Folosind notaţiile precedente, fie $B \subset S_1^{n+1}$ o subvarietate de tip spaţial, minimală $2k$-dimensională. Pentru orice $p \in B$, notăm prin

$$N_pB = \{X \in T_pS_1^{n+1} | < X, X >= -1, < X, T_pB >= 0\}.$$

Atunci $NB = \bigcup\limits_{p \in B} N_pB \subset H^{n+1}(-1)$ este o subvarietate $(2, ..., 2)$-ideală.

15 Alte inegalităţi de tip Chen

În lucrarea [9], B.Y. Chen stabileşte o relaţie optimă între curbura secţională şi operatorul Weingarten pentru subvarietăţi în forme spaţiale reale.

Teoremă 1. *Fie $x : M^n \to \widetilde{M}^m(c)$ o imersie izometrică a unei n-varietăţi riemanniane M^n într-o formă spaţială reală m-dimensională $\widetilde{M}^m(c)$ cu curbura secţională constantă c. Dacă există un punct $p \in M^n$ şi un număr $b > c$ astfel încât $K \geq b$ în p, atunci operatorul Weingarten în vectorul curbură medie satisface $A_H > \dfrac{n-1}{n}(b-c)I_n$ în p, unde I_n este funcţia identitate.*

În articolul [12], Chen defineşte noţiunea de k-curbură Ricci a unei varietăţi riemanniene, stabilind o relaţie optimă între k-curbura Ricci şi operatorul Weingarten şi de asemenea între k-curbura Ricci şi pătratul curburii medii pentru o subvarietate a unei forme spaţiale reale de codimensiune arbitrară.

Teoremă 2. *Fie $x : M^n \to \widetilde{M}^m(c)$ o imersie izometrică a unei n-varietăţi riemanniene M^n într-o formă spaţială reală m-dimensională $\widetilde{M}^m(c)$ cu curbura secţională constantă c. Atunci pentru orice întreg k, $2 \leq k \leq n$ şi orice punct $p \in M^n$, are loc:*

i) *dacă $\Theta_k(p) \neq c$, atunci operatorul Weingarten în H satisface*

$$A_H > \frac{n-1}{n}[\Theta_k(p) - c]I_n \text{ în } p\,;$$

adică diferenţa

$$A_H - \frac{n-1}{n}[b - \frac{1}{4}(c+3)] \cdot I_n \quad \text{în} \quad p,$$

este pozitiv definită, unde I_n este funcţia identitate.

ii) *dacă* $\Theta_k(p) = c$, *atunci* $A_H \geq 0$ *în* p;

iii) *un vector unitar* $X \in T_pM^n$ *satisface* $A_HX = \frac{n-1}{n}[\Theta_k(p) - c]X$ *dacă şi numai dacă* $\Theta_k(p) = c$ *şi* X *aparţine spaţiului relativ nul în* p;

iv) $A_H = \frac{n-1}{n}[\Theta_k(p) - c]I_n$ *în* p *dacă şi numai dacă* p *este un punct total geodezic, adică forma a doua fundamentală este identic nulă în* p.

Estimarea lui A_H dată de teorema 2 este optimă (a se vedea [12]).

Teoremă 3. *Fie* $x : M^n \to \widetilde{M}^m(c)$ *o imersie izometrică a unei* n*-varietăţi riemanniene* M^n *într-o formă spaţială reală* m*-dimensională* $\widetilde{M}^m(c)$ *cu curbura secţională constantă* c. *Atunci:*

i) *pentru fiecare vector unitar* $X \in T_pM^n$, *are loc*

$$\|H\|^2(p) \geq \frac{4}{n^2}[\mathrm{Ric}\ (X) - (n-1)c];$$

ii) *dacă* $H(p) = 0$, *atunci un vector unitar tangent* X *în* p *satisface cazul de egalitate dacă şi numai dacă* X *aparţine spaţiului relativ nul în* p;

iii) *cazul de egalitate are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi în* p *dacă şi numai dacă* p *este un punct total geodezic sau* $n = 2$ *şi* p *este punct total ombilical.*

Teorema 3 se poate aplica pentru obţinerea câtorva estimări optime ale pătratului curburii medii şi prin aplicarea acestora se obţin câteva relaţii între k-curbura Ricci şi pătratul curburii medie pentru o subvarietate într-o formă spaţială riemanniană de codimensiune arbitrară (a se vedea [12]).

Următoarea teoremă stabileşte o inegalitate între curbura medie şi curbura scalară pentru o subvarietate lagrangeană într-o formă spaţială complexă $\widetilde{M}^m(c)$.

Teoremă 4. *Dacă* M *este o subvarietate lagrangeană a lui* $\widetilde{M}^n(c)$, $n > 1$, *atunci curbura medie* H *şi curbura scalară* τ *din* M *satisfac*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(n+2)}{n^2(n-1)}\tau - \frac{n+2}{4n}c.$$

Cazul $c = 0$ a fost demonstrat de Borelli, Chen şi Morvan în [4] şi cazul $c \neq 0$ de Chen în [11]. De asemenea, a fost investigată caracterizarea din cazul de egalitate.

Vom exemplifica şi câteva inegalităţi B.Y. Chen pentru subvarietăţi C-total reale în forme spaţiale Sasaki.

Fie (M, g) o varietate riemanniană n-dimensională. Notăm cu $K(\pi)$ curbura secţională a secţiunii plane $\pi \subset T_xM$. Pentru orice baza ortonormată $\{e_1, ..., e_n\}$ a spaţiului tangent T_xM, curbura scalară τ în x se defineşte prin

$$\tau = \sum_{1 \leq i < j \leq n} K(e_i \wedge e_j).$$

Fie L un subspaţiu al lui T_xM de dimensiune $r \geq 2$ şi $\{e_1, ..., e_r\}$ o bază ortonormată a lui L. Se defineşte curbura scalară din L prin

$$\tau(L) = \sum_{1 \leq i < j \leq r} K(e_i \wedge e_j)\,.$$

Invariantul riemannian $\delta(n_1, ..., n_k)$ a fost introdus de B.Y. Chen [8] prin formula:

$$\delta(n_1, ..., n_k)(x) = \tau(x) - \inf\{\tau(L_1) + ... + \tau(L_k)\}\,,$$

unde $L_1, ..., L_k$ sunt subspaţii mutual ortogonale ale lui T_xM, cu $\dim L_j = n_j$.

În [8], B.Y. Chen a demonstrat o inegalitate optimă pentru aceşti invarianţi ai subvarietăţilor unei forme spaţiale reale şi respectiv complexe funcţie de curbura medie $|H|$ (care se numesc inegalităţi B.Y. Chen). Dacă egalitatea are loc peste tot, subvarietate se numeşte *ideală*.

În particular, invariantul riemannian $\delta_M = \delta(2) = \tau - \inf K$ a fost introdus şi investigat pentru prima oară în [7].

În [29] a fost demonstrată inegalitatea B.Y. Chen privind δ_M, pentru o subvarietate C-total reală a unei forme spaţiale Sasaki.

Teoremă. *Fie $\widetilde{M}(c)$ o formă spaţială Sasaki $(2m+1)$-dimensională şi M o subvarietate C-total reală n-dimensională $(n > 2)$ a lui $\widetilde{M}$. Atunci*

$$\delta_M \leq \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}|H|^2 + \frac{1}{8}(n+1)(c+3)\right\}.$$

Mai mult, egalitatea are loc într-un punct $x \in M$ dacă şi numai dacă există o bază tangentă $\{e_1, ..., e_n\} \subset T_xM$ şi o bază normală $\{e_{n+1}, ..., e_{2m}, e_{2m+1} = \xi\} \subset T_x^{\perp}M$ astfel încât operatorii Weingarten $A_r = A_{e_r}$, $r \in \{n+1, ..., 2m+1\}$ au următoarea formă

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu I_{n-2} \end{pmatrix}, \qquad a + b = \mu,$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 & \cdots & 0 \\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0_{n-2} \end{pmatrix}, \quad r \in \{n+2, ..., 2m\}$$

şi $A_\xi = 0$.

A fost obţinută o teoremă de clasificare pentru subvarietăţi ideale C-total reale în raport cu δ_M al unei forme spaţiale Sasaki în [17], [18].

Teoremă. *Fie M o subvarietate C-lagrangeană n-dimensională cu curbura scalară constantă a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$. Atunci M este ideală dacă şi numai dacă are loc unul dintre cazurile:*

i) *M este o subvarietate total geodezică;*

ii) *$n = 3$, $\widetilde{M}(c) = S^7$ şi M este local congruentă cu o anumită (non-standard) imersie izometrică a lui S^3 în S^7.*

Notăm cu $\mathcal{N}$ nucleul formei a doua fundamentale h,

$$\mathcal{N}_x = \{X \in T_xM;\ h(X,Y) = 0, \forall Y \in T_xM\}.$$

Teoremă. *Fie $\widetilde{M}(c)$ o formă spaţială Sasaki $(2n+1)$-dimensională şi M o subvarietate C-lagrangeană cu curbura scalară neconstantă astfel încât distribuţiile $\mathcal{N}$ şi $\mathcal{N}^\perp$ sunt complet integrabile. Atunci M este ideală dacă şi numai dacă M este local congruentă cu o imersie*

$$\psi\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times_{\cos t} N \times_{\sin t} S^{n-3} \to S^{2n+1}, \qquad \psi(t,p,q) = (\cos t)p + (\sin t)q,$$

unde N este o suprafaţă minimală C-total reală a lui S^5.

Folosind o metodă similară, se poate stabili inegalitatea de tip Chen pentru CR-subvarietăţi în forme spaţiale Sasaki [29].

Teoremă. *Fie $\widetilde{M}(c)$ o formă spaţială Sasaki $(2m+1)$-dimensională şi M o CR-subvarietate n-dimensională. Atunci, are loc*

$$\delta_M \leq \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}|H|^2 + \frac{1}{8}(n+1)(c+3)\right\} - (n-1-3h)(c-1)\ ,$$

unde $2h = \dim \mathcal{D}$.

Într-o altă lucrare [19], a fost obţinută inegalitatea de tip Chen pentru invarianţii $\delta(n_1, ..., n_k)$ pentru subvarietăţi C-total reală şi CR-subvarietăţi ale unei forme spaţiale Sasaki.

Teoremă. *Pentru o subvarietate C-total reală n-dimensională M a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$, avem*

$$\delta(n_1, ..., n_k)\ \leq\ \frac{n^2\left(n+k-1-\sum\limits_{j=1}^{k} n_j\right)}{2\left(n+k-\sum\limits_{j=1}^{k} n_j\right)}|H|^2$$

$$+\frac{1}{8}\left[n(n-1)-\sum_{j=1}^{k}n_j(n_j-1)\right](c+3).$$

Teoremă. *Orice subvarietate $C-$lagrangeană ideală a unei forme spaţiale Sasaki este minimală.*

Imaginea formei a doua fundamentale $\operatorname{Im} h \subset T^{\perp}M$ se numeşte *primul subfibrat normal.*

Corolar. *Nu există subvarietăţi C-lagrangeane ideale în S^{2n+1} cu $\dim \operatorname{Im} h = n$.*

O *subvarietate* M a unei varietăţi riemanniene $\widetilde{M}$ se numeşte *riglată* dacă în fiecare punct $p \in M$, M conţine o geodezică γ_p a lui $\widetilde{M}$ prin p.

Teoremă. *Fie M o subvarietate C-lagrangeană a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$. Dacă M este ideală, atunci M este riglată.*

De asemenea, a fost obţinută, inegalitatea Chen pentru CR-subvarietăţi ale formelor spaţiale Sasaki.

Teoremă. *Pentru o CR-subvarietate n -dimensională M a unei forme spaţiale Sasaki de dimensiune $(2m+1)$, avem*

$$\delta(n_1,...,n_k) \le \frac{n^2\left(n+k-1-\sum\limits_{j=1}^{k}n_j\right)}{2\left(n+k-\sum\limits_{j=1}^{k}n_j\right)}|H|^2$$
$$+\frac{1}{8}\left[n(n-1)-\sum_{j=1}^{k}n_j(n_j-1)\right](c+3)-\frac{1}{4}(n-1-3h)(c-1).$$

16 Curbura Ricci pentru subvarietăţi C-total reale

B.Y. Chen a demonstrat o relaţie optimă între curbura Ricci şi pătratul curburii medii pentru subvarietăţi în forme spaţiale reale (a se vedea [9]).

În [29], I. Mihai a stabilit o inegalitate similară pentru subvarietăţi în forme spaţiale Sasaki.

Teoremă 1. *Fie M o subvarietate C-total reală n-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$. Atunci:*

i) *pentru fiecare vector unitar $X \in T_xM$, avem*

$$|H|^2 \geq \frac{1}{n^2}\{4\mathrm{Ric}\ (X) - (n-1)(c+3)\}. \tag{1}$$

ii) *dacă $H(x) = 0$, atunci un vector unitar tangent X în x satisface cazul de egalitate din* (1) *dacă şi numai dacă $X \in \mathcal{N}_x$.*

iii) *cazul de egalitate din* (1) *are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi în $x \in M$ dacă şi numai dacă avem unul din cazurile: x este un punct total geodezic sau $n = 2$ şi x este un punct total ombilical.*

Pentru o subvarietate tangentă avem:

Teoremă 2. *Fie $\widetilde{M}(c)$ o formă spaţială Sasaki şi M o subvarietate n-dimensională tangentă la ξ. Atunci:*

i) *pentru fiecare vector unitar $X \in T_xM$ ortogonal la ξ, avem*

$$|H|^2 \geq \frac{1}{n^2}\left\{4\mathrm{Ric}\ (X) - (n-1)(c+3) - \frac{1}{2}(3\|PX\|^2 - 4)(c-1)\right\}. \tag{2}$$

ii) *dacă $H(x) = 0$, atunci un vector unitar $X \in T_xM$ ortogonal la ξ satisface cazul de egalitate din* (2) *dacă şi numai dacă $X \in \mathcal{N}_x$.*

iii) *cazul de egalitate din* (2) *are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonali la ξ în $x \in M$ dacă şi numai dacă x este un punct total geodezic.*

Corolarul 3. *Fie $\widetilde{M}(c)$ o formă spaţială Sasaki şi M o subvarietate invariantă n-dimensională. Atunci:*

i) *pentru fiecare vector unitar $X \in T_xM$ ortogonal la ξ, avem*

$$|H|^2 \geq \frac{1}{n^2}\left\{4\mathrm{Ric}\ (X) - (n-1)(c+3) + \frac{1}{2}(c-1)\right\}. \tag{3}$$

ii) *dacă $H(x) = 0$, atunci un vector unitar $X \in T_xM$ ortogonal la ξ satisface cazul de egalitate din* (3) *dacă şi numai dacă $X \in \mathcal{N}_x$.*

iii) *cazul de egalitate din* (3) *are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonali la ξ în $x \in M$ dacă şi numai dacă x este un punct total geodezic.*

Corolarul 4. *Fie $\widetilde{M}(c)$ o formă spaţială Sasaki şi M o subvarietate n-dimensională anti-invariantă tangentă la ξ. Atunci:*

i) *pentru fiecare vector unitar $X \in T_xM$ ortogonal la ξ, avem*

$$|H|^2 \geq \frac{1}{n^2}\{4\mathrm{Ric}\ (X) - (n-1)(c+3) + 2(c-1)\}. \tag{4}$$

ii) *dacă $H(x) = 0$, atunci un vector unitar $X \in T_xM$ ortogonal la ξ satisface cazul de egalitate din* (4) *dacă şi numai dacă $X \in \mathcal{N}_x$.*

iii) *cazul de egalitate din* (4) *are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonali la* ξ *în* $x \in M$ *dacă şi numai dacă avem unul din cazurile* x *este un punct total geodezic sau* $n = 2$ *şi* x *este un punct total ombilical.*

Bibliografie

[1] A. Bejancu, N. Papaghiuc, *Almost semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **28** (1984), 13-30.

[2] D.E. Blair, S.I. Goldberg, *Topology of almost contact manifolds*, J. Diff. Geom. **1** (1967), 347-354.

[3] D.E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Math.**509**, Springer, Berlin, 1976.

[4] V. Borelli, B.Y. Chen, J.M. Morvan, *Une caractérisation géométrique de la sphère de Whitney*, C.R. Acad. Sci. Paris **321** (1995), 1485-1490.

[5] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez, *Semi-slant submanifolds of a Sasakian manifold*, Geometriae Dedicata, **78** (1999), 183-199.

[6] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez, *Slant submanifolds in Sasakian space forms*, Glasgow Math. J. **42** (2000), 125-138.

[7] B.Y. Chen, *Geometry of Submanifolds and its Applications*, Science Univ. of Tokyo, 1981.

[8] B.Y. Chen, *CR-submanifolds of a Kaehler manifold, I, II*, J. Diff. Geometry **16** (1981), 305-322, 493-509.

[9] B.Y. Chen, *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite type*, World Scientific, 1984.

[10] B.Y. Chen, *Geometry of Slant Submanifolds*, K.U. Leuven, 1990.

[11] B.Y. Chen, *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds*, Arch. Math. **60** (1993), 568-578.

[12] B.Y. Chen, *A general inequality for submanifolds in complex-space-forms and its applications*, Archiv. Math. **67** (1996), 519-528.

[13] B.Y. Chen, *Mean curvature and shape operator of isometric immersions in real-space-forms*, Glasgow Math. J. **38** (1996), 87-97.

[14] B.Y. Chen, *Strings of Riemannian invariants, inequalities, ideal immersions and their applications*, 3-th Pacific Rim Geom. Conf., Seoul, Korea, (1996), 7-60, Internat. Press, Cambridge, MA, U.S.A.

[15] B.Y. Chen, *Special slant surfaces and a basic inequality*, Results Math. **33** (1998), 65-78.

[16] S.S. Chern, *Minimal Submanifolds in a Riemannian Manifold*, Univ. of Kansas, Lawrence, Kansas, 1968.

[17] F. Defever, I. Mihai, L. Verstraelen, *B.Y. Chen's inequality for C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Boll. Un. Mat. Ital. **11** (1997), 365-374.

[18] F. Defever, I. Mihai, L. Verstraelen, *A class of C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, J. Australian Math. Soc. **64** (1998), 120-128.

[19] F. Defever, I. Mihai, L. Verstraelen, *B-Y Chen's inequalities for submanifolds in Sasakian space forms*, Boll. Un. Mat. Ital. **4** (2001), 521-529.

[20] T. Fujitani, *Complex-valued differential forms on normal contact Riemannian manifolds*, Tohoku Math. J. **18** (1966), 349-361.

[21] S.I. Goldberg, *On the topology of compact contact manifolds*, Tohoku Math. J. **20** (1968), 106-110.

[22] J. Gray, *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math. **69** (1959), 421-450.

[23] M. Harada, *On the curvature of Sasakian manifolds*, Bull. Yamagata Univ. Nat. Sci. **7** (1969), 97-106.

[24] M. Harada, *On the minimal diameter of Sasakian manifolds*, Bull. Yamagata Univ. Nat. Sci. **7** (1970), 191-203.

[25] Y. Hatakeyama, Y. Ogawa, S. Tanno, *Some properties of manifolds with contact metric structures*, Tohoku Math. J. **15** (1963), 42-48.

[26] M. Kon, *Invariant submanifolds of normal contact metric*, Kodai Math. Sem. Rep. **25** (1973), 330-336.

[27] A. Lotta, *Slant submanifolds in contact geometry*, Bull. Math. Soc. Roumanie **39** (1996), 183-198.

[28] I. Mihai, *Certain submanifolds of a Kaehler manifold*, Geometry and Topology of Submanifolds VII, World Scientific, Singapore, (1995), 186-188.

[29] I. Mihai, *Ricci curvature of submanifolds in Sasakian space forms*, J. Austral. Math. Soc. **72** (2002), 247-256.

[30] E.M. Moskal, *Contact manifolds of positive curvature*, Thesis-University of Illinois (1960).

[31] A. Newlander, L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957) 391-404.

[32] K. Ogiue, *On fiberings of almost contact manifolds*, Kodai Math. Sem. Rep. **17** (1965), 53-62.

[33] M. Okumura, *On infinitesimal conformal and projective transformations of normal contact spaces*, Tohoku Math. J. **14** (1962), 398-412.

[34] M. Okumura, *Some remarks on space with a certain contact structure*, Tohoku Math. J. **14** (1962), 135-145.

[35] R. Osserman, *Curvature in the eighties*, Amer. Math. Monthly **97** (1990), 731-756

[36] S. Sasaki, *On differential manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I*, Tohoku Math. J. **12** (1960), 459-476.

[37] S. Sasaki, Y. Hatakeyama, *On differential manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II*, Tohoku Math. J. **13** (1961), 281-294.

[38] S. Sasaki, Y. Hatakeyama, *On differentiable manifolds with contact metric structures*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 249-271.

[39] S. Tachibana, *On harmonic tensors in compact Sasakian spaces*, Tohoku Math. J. **17** (1965), 271-284.

[40] S. Tanno, *The topology of contact Riemannian manifolds*, Illinois J. Math. **12** (1968), 700-717.

[41] S. Tanno, *Sasakian manifolds with constant ϕ-holomorphic sectional curvature*, Tohoku Math. J. **21** (1969), 501-507.

[42] S. Tanno, *Constancy of holomorphic sectional curvature in almost Hermitian manifold*, Kodai Math. J. Sem. Rep. **25** (1973) 190-201.

[43] S. Tanno, *Isometric immersions of Sasakian manifolds is spheres*, Kodai Math. Sem. Rep. **21** (1996), 448-458.

[44] Y. Tashiro, *On contact structures of hypersurfaces in almost complex manifolds I*, Tohoku Math. J. **15** (1963), 62-78.

[45] P. Verheyen, *Generic submanifolds of Sasakian manifolds*, Med. Wisk. Inst., K.U. Leuven 157 (1982).

[46] S. Yamaguchi, M. Kon, M. Miyahara, *A theorem on C-totally real minimal surface*, Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976), 276-280.

[47] K. Yano, S. Ishihara, *Invariant submanifolds of an almost contact manifold*, Kodai Math. Sem. Rep. **21** (1969), 350-364.

[48] K. Yano, M. Kon, *CR-Submanifolds of Käehlerian and Sasakian Manifolds*, Birkhäuser, Boston, 1983.

Capitolul 3
Optimizări pe subvarietăţi oblice

1 Extreme ale invarianţilor Chen pe subvarietăţi oblice

În aceast capitol, toate rezultatele aparţin autorului şi sunt demonstrate în lucrările: *B.Y. Chen inequalities for bi-slant submanifolds in Sasakian space forms*, Demonstratio Mathematica no. **1** (2003), Vol. **36**, 179-187; *B.Y. Chen inequalities for semi-slant submanifolds in Sasakian space forms*, I.J.M.M.S., no. **27** (2003), 1731-1738; *Submanifolds in Sasakian space forms*, Analele Universităţii Bucureşti Anul **L** , Nr. **2** (2001), 33-41; (împreună cu A. Oiaga) *B.Y. Chen inequalities for slant submanifolds in Sasakian space forms*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **52** (2003), 367-381.

Vom demonstra o inegalitate pentru subvarietăţi oblice în forme spaţiale Sasaki, referitoare la invariantul Chen δ_M. Pentru aceasta, vom considera secţiunea plană π ca fiind ortogonală la câmpul vectorial ξ, şi vom folosi lema lui Chen [4]:

Lema 1. [4] *Fie $n+1$, $n \geq 2$, numere reale $a_1, ..., a_n, c$ astfel încât*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 + c\right).$$

În aceste condiţii, are loc inegalitatea $2a_1a_2 \geq c$. Egalitatea fiind satisfăcută dacă şi numai dacă $a_1 + a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

Teorema 2. *Fie M o subvarietate θ-oblică $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ de dimensiune $(2m+1)$. Invariantul δ_M satisface* *inegalitatea:*

$$\delta_M \leq \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} + \frac{c-1}{8}[3(n-3)\cos^2\theta - 2(n-1)]. \tag{1}$$

Cazul de egalitate are loc într-un punct $p \in M$ dacă şi numai dacă există o bază ortonormată $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ a lui T_pM şi o bază ortonormată $\{e_{n+1}, ..., e_{2m}, e_{2m+1}\}$ a lui $T_p^{\perp}M$ astfel încât operatorii Weingarten ai lui M în $\widetilde{M}(c)$ în p au următoarea formă:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \mu I_{n-2} & \end{pmatrix}, \qquad a+b=\mu, \tag{2}$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h^r_{11} & h^r_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ h^r_{12} & -h^r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & O_{n-2} & \end{pmatrix}, \qquad r \in \{n+2, ..., 2m+1\}. \tag{3}$$

Demonstraţie. Formulele lui Gauss pentru subvarietatea M conduc la

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + g(h(X,W),h(Y,Z)) - g(h(X,Z),h(Y,W)),$$

pentru orice $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$.

Deoarece $\widetilde{M}(c)$ este o formă spaţială Sasaki, avem

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y,Z,W) = {} & \frac{c+3}{4}\{-g(Y,Z)g(X,W) + g(X,Z)g(Y,W)\} \\ & + \frac{c-1}{4}\{-\eta(X)\eta(Z)g(Y,W) + \eta(Y)\eta(Z)g(X,W) \\ & - g(X,Z)\eta(Y)g(\xi,W) + g(Y,Z)\eta(X)g(\xi,W) \\ & - g(\phi Y,Z)g(\phi X,W) + g(\phi X,Z)g(\phi Y,W) \\ & + 2g(\phi X,Y)g(\phi Z,W)\}, \qquad \forall X,Y,Z,W \in \Gamma(TM). \end{aligned} \tag{4}$$

Se consideră $p \in M$ şi $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ o bază ortonormată a lui T_pM şi $\{e_{n+1}, ..., e_{2m}, e_{2m+1}\}$ o bază ortonormată a lui $T_p^{\perp}M$. Pentru $X = Z = e_i$, $Y = W = e_j$, $\forall i,j \in \{1,...,n\}$, din egalitatea (4) rezultă

$$\widetilde{R}(e_i,e_j,e_i,e_j) = \frac{c+3}{4}(-n+n^2) + \frac{c-1}{4}\left\{-2(n-1) + 3\sum_{i,j=1}^{n} g^2(\phi e_i, e_j)\right\}. \tag{5}$$

Fie $M \subset \widetilde{M}(c)$ o θ-subvarietate oblică cu $\dim M = n = 2k+1$. Pentru $X \in \Gamma(TM)$, avem descompunerea

$$\phi X = PX + FX, \quad PX \in \Gamma(TM), \quad FX \in \Gamma(T^{\perp}M).$$

Fixăm $p \in M$ şi $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ o bază ortonormată a lui T_pM, cu

$$e_1,\ e_2 = \frac{1}{\cos\theta}Pe_1,\ ...,\ e_{2k} = \frac{1}{\cos\theta}Pe_{2k-1},\ e_{2k+1} = \xi.$$

Atunci

$$g(\phi e_1, e_2) = g\left(\phi e_1, \frac{1}{\cos\theta}Pe_1\right) = \frac{1}{\cos\theta}g(\phi e_1, Pe_1) = \frac{1}{\cos\theta}g(Pe_1, Pe_1) = \cos\theta$$

şi, analog,

$$g^2(\phi e_i, e_{i+1}) = \cos^2\theta.$$

Astfel,

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^2(\phi e_i, e_j) = (n-1)\cos^2\theta.$$

Relaţia (5) implică

$$(6) \qquad \widetilde{R}(e_i, e_j, e_i, e_j) = \frac{c+3}{4}(n^2 - n) + \frac{c-1}{4}[3(n-1)\cos^2\theta - 2(n-1)].$$

Notăm prin

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)).$$

Relaţia (6) devine

$$\frac{c+3}{4}n(n-1) + \frac{c-1}{4}[3(n-1)\cos^2\theta - 2n + 2] = 2\tau - n^2\|H\|^2 + \|h\|^2,$$

sau echivalent,

$$2\tau = n^2\|H\|^2 - \|h\|^2 + \frac{c+3}{4}n(n-1) + \frac{c-1}{4}[3(n-1)\cos^2\theta - 2n + 2].$$

Dacă punem

$$\varepsilon = 2\tau - \frac{n^2}{n-1}(n-2)\|H\|^2 - \frac{c+3}{4}n(n-1) - \frac{c-1}{4}[3(n-1)\cos^2\theta - 2n + 2],$$

obţinem

$$(7) \qquad n^2\|H\|^2 = (n-1)(\varepsilon + \|h\|^2).$$

Fixăm $p \in M$, $\pi \subset T_pM$, $\dim \pi = 2$, $\pi = sp\{e_1, e_2\}$. Considerăm $e_{n+1} = \dfrac{H}{\|H\|}$. Relaţia (7) devine

$$\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1}\right)^2 = (n-1)\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{2m+1}(h_{ij}^r)^2 + \varepsilon\right\},$$

sau, echivalent,

$$(8) \quad \left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1}\right)^2 = (n-1)\left\{\sum_{i=1}^{n}[(h_{ii}^{n+1})^2 + \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^r)^2 + \varepsilon\right\}.$$

Cu ajutorul lemei 1, deducem din (8):

$$2h_{11}^{n+1}h_{22}^{n+1} \geq \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+2}^{2m+1}(h_{ij}^r)^2 + \varepsilon.$$

Din ecuaţia lui Gauss, pentru $X = Z = e_1$, $Y = W = e_2$, obţinem

$$\begin{aligned}
K(\pi) &= \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta\cdot\frac{c-1}{4} + \sum_{r=n+1}^{2m+1}[h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2] \\
&\geq \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta\cdot\frac{c-1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+2}^{2m+1}(h_{ij}^r)^2 \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{r=n+2}^{2m+1} h_{11}^r h_{22}^r - \sum_{r=n+1}^{2m+1}(h_{12}^r)^2 \\
&= \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta\cdot\frac{c-1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{i,j>2}(h_{ij}^r)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{2m+1}(h_{11}^r + h_{22}^r)^2 + \sum_{j>2}[(h_{1j}^{n+1})^2 + (h_{2j}^{n+1})^2]
\end{aligned}$$

sau, echivalent,

$$K(\pi) \geq \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta\cdot\frac{c-1}{4} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci, deoarece inegalitatea se menţine pentru fiecare plan π, avem

$$\inf_{\pi} K(\pi) \geq \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta\cdot\frac{c-1}{4} + \tau$$

$$-\left\{\frac{c+3}{8}(n^2-n)+\frac{c-1}{8}[3(n-1)\cos^2\theta-2n+2]\right\}$$
$$-\frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2.$$

Ultima relaţie implică

$$\delta_M \le \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2+\frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\}$$
$$+\frac{c-1}{8}[3(n-3)\cos^2\theta-2(n-1)],$$

unde δ_M se defineşte prin formula

$$\delta_M(p)=\tau(p)-\inf K(\pi)(p).$$

Această relaţie reprezintă inegalitatea ce trebuie demonstrată.

Cazul de egalitate într-un punct $p\in M$ are loc dacă şi numai dacă avem egalitate în inegalitatea precedentă şi în lema 1, adică

$$\begin{cases} h_{ij}^{n+1}=0, \quad \forall i\neq j, \quad i,j>2,\\ h_{ij}^{r}=0, \quad \forall i\neq j, \quad i,j>2, \quad r=n+1,...,2m+1,\\ h_{11}^{r}+h_{22}^{r}=0, \quad \forall r=n+2,...,2m+1,\\ h_{1j}^{n+1}=h_{2j}^{n+1}=0, \quad \forall j>2,\\ h_{11}^{n+1}+h_{22}^{n+1}=h_{33}^{n+1}=\cdots=h_{nn}^{n+1}. \end{cases}$$

Fixăm $\{e_1,e_2\}$ astfel încât $h_{12}^{n+1}=0$. Notăm $a=h_{11}^{r}$, $b=h_{22}^{r}$, $\mu=h_{33}^{n+1}=\cdots=h_{nn}^{n+1}$. Rezultă că operatorii Weingarten au forma dorită. Raţionamentul reciproc este evident ∎

Corolarul 3. *Fie M o subvarietate invariantă cu unghiul de oblicitate $\theta=0$, $(n=2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ de dimensiune $(2m+1)$. Atunci,*

$$\delta_M\le\frac{(c+3)(n-2)(n+1)}{8}+\frac{(c-1)(n-7)}{8}.$$

Corolarul 4. *Fie M o subvarietate anti-invariantă n -dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ de dimensiune $(2m+1)$. Atunci,*

$$\delta_M\le\frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2+\frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\}-\frac{(c-1)(n-1)}{4}.$$

Vom extinde teorema 2, pentru invarianţii Chen $\delta(n_1, ..., n_k)$, considerând numai subspaţii ortogonale la ξ.

Teorema 5. *Fie M o subvarietate θ-oblică $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$. Invariantul $\delta(n_1, ..., n_k)$ satisface inegalitatea:*

$$\delta(n_1, ..., n_k) \le d(n_1, ..., n_k) \|H\|^2 + b(n_1, ..., n_k)\frac{c+3}{8} + \frac{c-1}{8}\left\{3(n-1)\cos^2\theta - 3\sum_{j=1}^{k} n_j \cos^2\theta\right\}. \tag{9}$$

Pentru demonstrarea teoremei precedente, avem nevoie de următoarele:

Fie $\widetilde{M}(c)$ o formă spaţială Sasaki $(2m+1)$-dimensională şi $M \subset \widetilde{M}(c)$ o θ-subvarietate $(n = 2k+1)$-dimensională oblică tangentă la ξ.

Pentru orice $p \in M$ şi pentru orice $X \in T_pM$, avem descompunerea

$$\phi X = PX + FX, \quad PX \in T_pM, \quad FX \in T_p^{\perp}M.$$

Fie $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ o bază ortonormală a lui T_pM. Atunci

$$\|P\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g^2(Pe_i, e_j).$$

Fie $L \subset T_pM$ un subspaţiu vectorial cu $\dim L = r$. Punem

$$\Psi(L) = \sum_{1 \le i < j \le r}^{n} g^2(Pu_i, u_j),$$

unde $\{u_1, ..., u_r\}$ este o bază ortonormală din L.

Următoarea lemă este o adaptare a a unei leme din [8], la varietăţi Sasaki.

Lema 6. Fie M o *subvarietate θ-oblică $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$. Fie $n_1, ..., n_k$ întregi ≥ 2 satisfăcând $n_1 < n$ şi $n_1 + \cdots + n_k \le n$. Pentru $p \in M$, fie $L_j \subset T_pM$ subspaţiile lui T_pM, cu $\dim L_j = n_j$, $\forall j \in \{1, ..., k\}$. Se satisface inegalitatea*

$$\tau - \sum_{j=1}^{k} \tau(L_j) \le d(n_1, ..., n_k) \|H\|^2 + \left\{\frac{c+3}{8}n(n-1) + \frac{c-1}{8}(3\|P\|^2 - 2n + 2)\right\} - \sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{c+3}{8}n_j(n_j-1) + \frac{c-1}{4}3\Psi(L_j)\right\}. \tag{10}$$

Demonstraţie. Fie $p \in M$ şi $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ o bază ortonormată a lui T_pM; din relaţia (4), pentru $X = Z = e_i$, $Y = W = e_j$, avem

$$(11)\quad 2\tau = n^2\|H\|^2 - \|h\|^2 + \left[\frac{c+3}{4}n(n-1) + \frac{c-1}{4}(3\,\|P\|^2 - 2n + 2)\right].$$

Notăm prin

$$\eta = 2\tau - 2d(n_1, ..., n_k)\|H\|^2 - \left[\frac{c+3}{4}n(n-1) + \frac{c-1}{4}(3\,\|P\|^2 - 2n + 2)\right],$$

obţinem

$$(12)\qquad n^2\|H\|^2 = (\eta + \|h\|^2)\gamma,$$

unde $\gamma = n + k - \sum\limits_{j=1}^{k} n_j$.

Din ecuaţia lui Gauss, rezultă

$$(13)\qquad \begin{aligned}\tau(L_j) \;=\; & \left\{\frac{c+3}{8}n_j(n_j-1) + \frac{c-1}{4}3\Psi(L_j)\right\} \\ & + \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{\alpha_j<\beta_j}[h^r_{\alpha_j\alpha_j}h^r_{\beta_j\beta_j} - (h^r_{\alpha_j\beta_j})^2].\end{aligned}$$

Demonstrăm că

$$(14)\qquad \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{\alpha_j<\beta_j}[h^r_{\alpha_j\alpha_j}h^r_{\beta_j\beta_j} - (h^r_{\alpha_j\beta_j})^2] \geq \frac{\eta}{2},$$

unde η se defineşte din relaţia (11).

Fie $p \in M$ şi $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ o bază ortonormală din T_pM; fie k subspaţii mutual ortogonale $L_1, ..., L_k$, din T_pM, $\dim L_j = n_j$, definite prin:

$$\begin{aligned}&L_1 = \mathrm{sp}\,\{e_1, ..., e_{n_1}\},\\ &L_2 = \mathrm{sp}\,\{e_{n_1+1}, ..., e_{n_1+n_2}\},\\ &\ldots\\ &L_k = \mathrm{sp}\,\{e_{n_1+...+n_{k-1}+1}, ..., e_{n_1+...+n_{k-1}+n_k}\}.\end{aligned}$$

Fixăm $e_{n+1} = \dfrac{H}{\|H\|}$, $e_{n+1} \in T_p^{\perp}M$. Notăm $a_i = h^{n+1}_{ii} = g(h(e_i, e_i), e_{n+1})$ şi din relaţia (12), obţinem

$$(15)\qquad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \gamma\left[\eta + \sum_{i\neq j}(h^{n+1}_{ij})^2 + \sum_{i=1}^{n}(h^{n+1}_{ii})^2 + \sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{i,j=1}^{n}(h^r_{ij})^2\right].$$

Notăm cu D_j, $j = 1, ..., k$, mulţimea:

$$D_1 = \{1, ..., n_1\},$$
$$D_2 = \{n_1 + 1, ..., n_1 + n_2\},$$
$$\cdots$$
$$D_k = \{n_1 + ... + n_{k-1} + 1, ..., n_1 + ... + n_{k-1} + n_k\}.$$

De asemenea, notăm

$$b_1 = a_1,$$
$$b_2 = a_2 + \cdots + a_{n_1},$$
$$b_3 = a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_1+n_2},$$
$$\cdots$$
$$b_{k+1} = a_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}+n_k},$$
$$b_{k+2} = a_{n_1+\cdots+n_k+1},$$
$$\cdots$$
$$b_{\gamma+1} = a_n.$$

Atunci, relaţia (15) devine

$$\left(\sum_{i=1}^{\gamma+1} b_i\right)^2 = \gamma\left[\eta + \sum_{i=1}^{\gamma+1} b_i^2 + \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{i=1}^{n}(h_{ii}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^r)^2 - \right.$$
$$\left. - \left(2\sum_{2\leq\alpha_1<\beta_1\leq n_1} a_{\alpha_1}a_{\beta_1} - \cdots - \sum_{\alpha_k<\beta_k} a_{\alpha_k}a_{\beta_k}\right)\right],$$

cu $\alpha_j, \beta_j \in D_j$, $\forall j \in \{1, ..., k\}$.

Aplicând lema 1, avem

$$\sum_{\alpha_1<\beta_1} a_{\alpha_1}a_{\beta_1} + ... + \sum_{\alpha_k<\beta_k} a_{\alpha_k}a_{\beta_k} \geq \frac{1}{2}\left[\eta + \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^r)^2\right].$$

Relaţia precedentă implică

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{\alpha_j<\beta_j}[h_{\alpha_j\alpha_j}^r h_{\beta_j\beta_j}^r - (h_{\alpha_j\beta_j}^r)^2] \geq \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{(\alpha,\beta)\notin D^2}(h_{\alpha\beta}^r)^2$$
$$+ \sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{\alpha_j\in D_j}(h_{\alpha_j\alpha_j}^r)^2 \geq \frac{\eta}{2},$$

unde $D^2 = (D_1 \times D_1) \cup \cdots \cup (D_k \times D_k)$.

Astfel, avem de demonstrat relaţia (14). Din relaţia (13), obţinem

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \tau(L_j) \ \geq\ & \frac{\eta}{2} + \sum_{j=1}^{k} \left\{ \frac{c+3}{8} n_j(n_j-1) + \frac{c-1}{4} 3\Psi(L_j) \right\} \\ &= \tau - d(n_1, ..., n_k) \left\| H \right\|^2 - \left\{ \frac{c+3}{8} n(n-1) + \frac{c-1}{8} (3 \left\| P \right\|^2 - 2n + 2) \right\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k} \left\{ \frac{c+3}{8} n_j(n_j-1) + \frac{c-1}{4} 3\Psi(L_j) \right\},\end{aligned}$$

sau echivalent,

$$\begin{aligned}\tau - \sum_{j=1}^{k} \tau(L_j) \ \leq\ & d(n_1, ..., n_k) \left\| H \right\|^2 + \left\{ \frac{c+3}{8} n(n-1) + \frac{c-1}{8} (3 \left\| P \right\|^2 - 2n + 2) \right\} \\ &- \sum_{j=1}^{k} \left\{ \frac{c+3}{8} n_j(n_j-1) + \frac{c-1}{4} 3\Psi(L_j) \right\}.\end{aligned}$$

Această relaţie reprezintă inegalitatea ce trebuie demonstrată ∎

Demonstraţia teoremei 5. Fie M o subvarietate θ-oblică $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$. Fie $p \in M$ şi $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ o bază ortonormată a lui T_pM, astfel încât

$$e_1,\ e_2 = \frac{1}{\cos\theta} P e_1,\ ...,\ e_{2k} = \frac{1}{\cos\theta} P e_{2k-1},\ e_{2k+1} = \xi.$$

Avem

$$g(\phi e_i, e_{i+1}) = \cos\theta,$$

care implică $\left\| P \right\|^2 = (n-1)\cos^2\theta$.

Fie $L_1, ..., L_k$, k subspaţii mutual ortogonale din T_pM, $\dim L_j = n_j$, definite prin:

$$\begin{aligned}&L_1 = \mathrm{sp}\left\{e_1, ..., e_{n_1}\right\}, \\ &L_2 = \mathrm{sp}\left\{e_{n_1+1}, ..., e_{n_1+n_2}\right\}, \\ &\cdots \\ &L_k = \mathrm{sp}\left\{e_{n_1+...+n_{k-1}+1}, ..., e_{n_1+...+n_{k-1}+n_k}\right\}.\end{aligned}$$

Atunci, $\Psi(L_j) = 2n_j \cos^2\theta$.

Din (10), obţinem inegalitatea (9) ∎

Corolarul 7. *Fie M o subvarietate invariantă cu unghiul de oblicitate $\theta = 0$, $(n = 2k+1)$ -dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$. Atunci, avem:*

$$\delta(n_1, ..., n_k) \leq b(n_1, ..., n_k)\frac{c+3}{8} + \frac{c-1}{8}\left\{3(n-1) - 3\sum_{j=1}^{k} n_j\right\}.$$

Corolarul 8. *Fie M o subvarietate anti-invariantă cu unghiul de oblicitate $\theta = \frac{\pi}{2}$, $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$. Atunci, avem:*

$$\delta(n_1, ..., n_k) \leq d(n_1, ..., n_k) \left\|H\right\|^2 + b(n_1, ..., n_k)\frac{c+3}{8}.$$

2 Minimul curburii secţionale pe subvarietăţi 2-oblice

În continuare, vom demonstra o optimizare pentru subvarietăţi 2-oblice ale unei forme spaţiale Sasaki, rezultat inclus în articolul [11]. Vom considera secţiunea plană π ortogonală la ξ.

Teorema 9. *Fie M o subvarietate 2-oblică $(n = 2d_1 + 2d_2 + 1)$ dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$. Atunci avem:*

$$\begin{aligned}(16)\qquad \min_{\pi} K(\pi) \;=\; & \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\left\|H\right\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} \\ & -\frac{(c-1)}{4}[3(d_1-1)\cos^2\theta_1 + 3d_2\cos^2\theta_2 - (n-1)],\end{aligned}$$

pe $\mathcal{D}_1$ şi

$$\begin{aligned}(17)\qquad \min_{\pi} K(\pi) \;=\; & \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\left\|H\right\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} \\ & -\frac{(c-1)}{4}[3d_1\cos^2\theta_1 + 3(d_2-1)\cos^2\theta_2 - (n-1)],\end{aligned}$$

pe $\mathcal{D}_2$.

Cazul de egalitate pentru (16) *sau* (17) *are loc într-un punct $p \in M$ dacă şi numai dacă există o bază ortonormată $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ a lui T_pM şi o bază ortonormată $\{e_{n+1}, ..., e_{2m}, e_{2m+1}\}$ a lui $T_p^{\perp}M$ astfel încât operatorii Weingarten ai* *lui* M *în* $\widetilde{M}(c)$ *în* p *au următoarea formă:*

$$A_{n+1}=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & & \mu I_{n-2} & \end{pmatrix},\qquad a+b=\mu,$$

$$A_r=\begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 & \cdots & 0\\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & & O_{n-2} & \end{pmatrix},\qquad r\in\{n+2,...,2m+1\}.$$

Demonstraţie. Reamintim ecuaţia Gauss pentru subvarietatea M

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W)=R(X,Y,Z,W)+g(h(X,W),h(Y,Z))-g(h(X,Z),h(Y,W)),$$

pentru toţi $X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$.

Deoarece $\widetilde{M}(c)$ este o formă spaţială Sasaki, avem

$$\begin{aligned}(18)\quad \widetilde{R}(X,Y,Z,W) =\ & \frac{c+3}{4}\{-g(Y,Z)g(X,W)+g(X,Z)g(Y,W)\}\\ &+\frac{c-1}{4}\{-\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)+\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)\\ &-g(X,Z)\eta(Y)g(\xi,W)+g(Y,Z)\eta(X)g(\xi,W)\\ &-g(\phi Y,Z)g(\phi X,W)+g(\phi X,Z)g(\phi Y,W)\\ &+2g(\phi X,Y)g(\phi Z,W)\},\qquad \forall X,Y,Z,W\in\Gamma(TM).\end{aligned}$$

Se consideră $p\in M$ şi $\{e_1,...,e_n=\xi\}$ o bază ortonormală a lui T_pM şi $\{e_{n+1},...,e_{2m},e_{2m+1}\}$ o bază ortonormală a lui $T_p^{\perp}M$. Pentru $X=Z=e_i$, $Y=W=e_j$, $\forall i,j\in\{1,...,n\}$, din egalitatea (18), avem că

$$\begin{aligned}(19)\qquad \widetilde{R}(e_i,e_j,e_i,e_j) =\ & \frac{c+3}{4}(-n+n^2)\\ &+\frac{c-1}{4}\left\{-2(n-1)+3\sum_{i,j=1}^{n}g^2(\phi e_i,e_j)\right\}.\end{aligned}$$

Fie $M\subset\widetilde{M}(c)$ o subvarietate 2-oblică, cu $\dim M=n=2d_1+2d_2+1$. Vom considera un reper adaptat 2-oblic ortonormat

$$\begin{aligned}&e_1,\ e_2=\frac{1}{\cos\theta_1}Pe_1,\ ...,\ e_{2d_1-1},\ e_{2d_1}=\frac{1}{\cos\theta_1}Pe_{2d_1-1},\ e_{2d_1+1},\\ &e_{2d_1+2}=\frac{1}{\cos\theta_2}Pe_{2d_1+1},\ ...,\ e_{2d_1+2d_2-1},\ e_{2d_1+2d_2}=\frac{1}{\cos\theta_2}Pe_{2d_1+2d_2-1},\\ &e_{2d_1+2d_2+1}=\xi.\end{aligned}$$

Avem

$$g(\phi e_1, e_2) = g(\phi e_1, \frac{1}{\cos\theta_1} Pe_1) = \frac{1}{\cos\theta_1} g(\phi e_1, Pe_1) = \frac{1}{\cos\theta_1} g(Pe_1, Pe_1) = \cos\theta_1$$

şi, în acelaşi fel,

$$g^2(\phi e_i, e_{i+1}) = \begin{cases} \cos^2\theta_1 \text{ pentru } i \in \{1, ..., 2d_1 - 1\}, \\ \cos^2\theta_2 \text{ pentru } i \in \{2d_1 + 1, ..., 2d_1 + 2d_2 - 1\}. \end{cases}$$

Atunci

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^2(\phi e_i, e_j) = 2(d_1 \cos^2\theta_1 + d_2 \cos^2\theta_2).$$

Relaţia (19) implică

$$\text{(20)} \qquad \begin{aligned} \widetilde{R}(e_i, e_j, e_i, e_j) &= \frac{c+3}{4}(n^2 - n) \\ &+ \frac{c-1}{4}[6(d_1\cos^2\theta_1 + d_2\cos^2\theta_2) - 2(n-1)]. \end{aligned}$$

Notăm prin

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)).$$

Din relaţia (20), rezultă

$$\begin{aligned} \frac{c+3}{4}n(n-1) + \frac{c-1}{4}[6(d_1\cos^2\theta_1 + d_2\cos^2\theta_2) - 2n + 2] \\ = 2\tau - n^2\|H\|^2 + \|h\|^2, \end{aligned}$$

sau echivalent,

$$\begin{aligned} 2\tau &= n^2\|H\|^2 - \|h\|^2 + \frac{c+3}{4}n(n-1) \\ &+ \frac{c-1}{4}[6(d_1\cos^2\theta_1 + d_2\cos^2\theta_2) - 2n + 2]. \end{aligned}$$

Dacă punem

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2\tau - \frac{n^2}{n-1}(n-2)\|H\|^2 - \frac{c+3}{4}n(n-1) \\ &- \frac{c-1}{4}[6(d_1\cos^2\theta_1 + d_2\cos^2\theta_2) - 2n + 2], \end{aligned}$$

obţinem

$$n^2\|H\|^2 = (n-1)(\varepsilon + \|h\|^2). \tag{21}$$

Fie $p \in M$, $\pi \subset T_pM$, $\dim \pi = 2$, π ortogonal la ξ. Vom considera două cazuri:

i) π este tangent la $\mathcal{D}_1$. Se poate presupune că $\pi = \mathrm{sp}\,\{e_1, e_2\}$.

Fixăm $e_{n+1} = \dfrac{H}{\|H\|}$. Relaţia (21) devine

$$\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1}\right)^2 = (n-1)\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{2m+1}(h_{ij}^r)^2 + \varepsilon\right\},$$

sau echivalent,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1}\right)^2 = (n-1)\left\{\sum_{i=1}^{n}[(h_{ii}^{n+1})^2 + \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^r)^2 + \varepsilon\right\}. \tag{22}$$

Prin folosirea lemei 1, deducem din (22):

$$2h_{11}^{n+1}h_{22}^{n+1} \geq \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+2}^{2m+1}(h_{ij}^r)^2 + \varepsilon.$$

Din ecuaţia lui Gauss pentru $X = Z = e_1$, $Y = W = e_2$, obţinem

$$\begin{aligned}
K(\pi) \;=\; & \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta_1 \cdot \frac{c-1}{4} + \sum_{r=n+1}^{2m+1}[h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2] \\
\geq\; & \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta_1 \cdot \frac{c-1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+2}^{2m+1}(h_{ij}^r)^2 + \frac{\varepsilon}{2} \\
& + \sum_{r=n+2}^{2m+1} h_{11}^r h_{22}^r - \sum_{r=n+1}^{2m+1}(h_{12}^r)^2 \\
=\; & \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta_1 \cdot \frac{c-1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{i,j>2}(h_{ij}^r)^2 \\
& + \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{2m+1}(h_{11}^r + h_{22}^r)^2 + \sum_{j>2}[(h_{1j}^{n+1})^2 + (h_{2j}^{n+1})^2] + \frac{\varepsilon}{2} \\
\geq\; & \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta_1 \cdot \frac{c-1}{4} + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

sau echivalent,

$$K(\pi) \geq \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta_1 \cdot \frac{c-1}{4} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci

$$\inf_{\pi} K(\pi) - \tau \geq \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta_1 \cdot \frac{c-1}{4}$$
$$-\left\{\frac{c+3}{8}(n^2-n) + \frac{c-1}{8}[6(d_1\cos^2\theta_1 + d_2\cos^2\theta_2) - 2n + 2]\right\}$$
$$-\frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2.$$

Ultima relaţie implică

$$\min_{\pi} K(\pi) = \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\}$$
$$-\frac{c-1}{4}[3(d_1\cos^2\theta_1 + d_2\cos^2\theta_2) - (n-1)] + 3\cos^2\theta_1 \cdot \frac{c-1}{4}.$$

ii) similar, dacă π este tangent la $\mathcal{D}_2$, obţinem

$$\min_{\pi} K(\pi) = \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\}$$
$$-\frac{c-1}{4}[3(d_1\cos^2\theta_1 + d_2\cos^2\theta_2) - (n-1)] + 3\cos^2\theta_2\frac{c-1}{4}.$$

Aceste relaţii reprezintă egalităţile ce trebuiau demonstrate.

Cazul de egalitate într-un punct $p \in M$ are loc dacă şi numai dacă are loc relaţia precedentă în caz de egalitate şi dacă avem egalitate în lema 1, adică

$$\begin{cases} h_{ij}^{n+1} = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i,j > 2, \\ h_{ij}^{r} = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i,j > 2, \quad r = n+1, ..., 2m+1, \\ h_{11}^{r} + h_{22}^{r} = 0, \quad \forall r = n+2, ..., 2m+1, \\ h_{1j}^{n+1} = h_{2j}^{n+1} = 0, \quad \forall j > 2, \\ h_{11}^{n+1} + h_{22}^{n+1} = h_{33}^{n+1} = \cdots = h_{nn}^{n+1}. \end{cases}$$

Se poate alege $\{e_1, e_2\}$ astfel încât $h_{12}^{n+1} = 0$. Notăm $a = h_{11}^r$, $b = h_{22}^r$, $\mu = h_{33}^{n+1} = \cdots = h_{nn}^{n+1}$. Rezultă că operatorii Weingarten au forma dorită. Raţionamentul reciproc este evident ∎

Corolarul 10. *Fie M o CR subvarietate de contact n-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$. Atunci,*

$$\min_{\pi} K(\pi) = \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} - \frac{(c-1)}{4}[3d_1 - (n+2)],$$

pe $\mathcal{D}_1$ *şi*

$$\min_{\pi} K(\pi) = \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} - \frac{(c-1)}{4}[3d_1 - (n-1)],$$

pe $\mathcal{D}_2$.

Observaţie. În particular, dacă $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, pentru subvarietăţi oblice, deducem teorema 1.

Corolarul 11. *Fie* M *o subvarietate invariantă* $(n = 2k+1)$*-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki* $(2m+1)$*-dimensională* $\widetilde{M}(c)$*. Atunci, avem*

$$\delta_M \leq \frac{(c+3)(n-2)(n+1)}{8} + \frac{(c-1)(n-7)}{8}.$$

Corolarul 12. *Fie* M *o subvarietate anti-invariantă* n*-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki* $(2m+1)$*-dimensională* $\widetilde{M}(c)$*. Atunci, avem*

$$\delta_M \leq \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} - \frac{(c-1)(n-1)}{4}.$$

3 Minimul curburii secţionale pe subvarietăţi semioblice

Similar avem o inegalitate pentru subvarietăţi semioblice dintr-o formă spaţială Sasaki. Aceasta este inclusă în lucrarea [12].

Vom considera secţiunea plană π ortogonală la ξ.

Teorema 13. *Fie* M *o subvarietate semioblică* $(n = 2d_1+2d_2+1)$ *dimensională a unei forme spaţiale Sasaki* $(2m+1)$*-dimensională* $\widetilde{M}(c)$*. Atunci, avem:*

$$\begin{aligned}(23)\qquad \min_{\pi} K(\pi) &= \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} \\ &\quad - \frac{(c-1)}{4}[3d_2\cos^2\theta + 3(d_1-1) - (n-1)],\end{aligned}$$

pe $\mathcal{D}_1$ *şi*

$$\begin{aligned}(24)\qquad \min_{\pi} K(\pi) &= \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} \\ &\quad - \frac{(c-1)}{4}[3(d_2-1)\cos^2\theta + 3d_1 - (n-1)].\end{aligned}$$

pe $\mathcal{D}_2$.

Cazul de egalitate pentru (23) *şi* (24) *are loc într-un punct* $p \in M$ *dacă şi numai dacă există o bază ortonormată* $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ *a lui* T_pM *şi o bază ortonormată* $\{e_{n+1}, ..., e_{2m}, e_{2m+1}\}$ *a lui* $T_p^{\perp}M$ *astfel încât operatorii Weingarten ai lui* M *în* $\widetilde{M}(c)$ *în* p *au următoarea formă:*

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \mu I_{n-2} & \end{pmatrix}, \qquad a + b = \mu,$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 & \cdots & 0 \\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & O_{n-2} & \end{pmatrix}, \qquad r \in \{n+2, ..., 2m+1\}.$$

Demonstraţie. Reamintim ecuaţia lui Gauss pentru subvarietatea M

$$\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) + g(h(X, W), h(Y, Z)) - g(h(X, Z), h(Y, W)),$$

pentru toţi $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$.

Deoarece $\widetilde{M}(c)$ este o formă spaţială Sasaki, atunci avem

$$\begin{aligned} (25) \quad \widetilde{R}(X, Y, Z, W) = {} & \frac{c+3}{4}\{-g(Y, Z)g(X, W) + g(X, Z)g(Y, W)\} \\ & + \frac{c-1}{4}\{-\eta(X)\eta(Z)g(Y, W) + \eta(Y)\eta(Z)g(X, W) \\ & - g(X, Z)\eta(Y)g(\xi, W) + g(Y, Z)\eta(X)g(\xi, W) \\ & - g(\phi Y, Z)g(\phi X, W) + g(\phi X, Z)g(\phi Y, W) \\ & + 2g(\phi X, Y)g(\phi Z, W)\}, \qquad \forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM). \end{aligned}$$

Se consideră $p \in M$ şi $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ o bază ortonormată a lui T_pM şi $\{e_{n+1}, ..., e_{2m}, e_{2m+1}\}$ o bază ortonormată a lui $T_p^{\perp}M$. Pentru $X = Z = e_i$, $Y = W = e_j$, $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, din ecuaţia (25), avem că

$$\begin{aligned} (26) \qquad \widetilde{R}(e_i, e_j, e_i, e_j) = {} & \frac{c+3}{4}(-n + n^2) \\ & + \frac{c-1}{4}\left\{-2(n-1) + 3\sum_{i,j=1}^{n} g^2(\phi e_i, e_j)\right\}. \end{aligned}$$

Fie $M \subset \widetilde{M}(c)$ o subvarietate semioblică, $\dim M = n = 2d_1 + 2d_2 + 1$. Vom considera un reper ortonormat adaptat semioblic

$$\begin{aligned}
&e_1, \quad e_2 = \frac{1}{\cos\theta} Pe_1, \quad ..., \quad e_{2d_1-1}, \quad e_{2d_1} = \frac{1}{\cos\theta} Pe_{2d_1-1}, \quad e_{2d_1+1}, \\
&e_{2d_1+2} = \phi e_{2d_1+1}, \quad ..., \quad e_{2d_1+2d_2-1}, \quad e_{2d_1+2d_2} = \phi e_{2d_1+2d_2-1}, \\
&e_{2d_1+2d_2+1} = \xi.
\end{aligned}$$

Avem

$$g(\phi e_1, e_2) = g(\phi e_1, \frac{1}{\cos\theta} Pe_1) = \frac{1}{\cos\theta} g(\phi e_1, Pe_1) = \frac{1}{\cos\theta} g(Pe_1, Pe_1) = \cos\theta$$

şi analog

$$g^2(\phi e_i, e_{i+1}) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i \in \{1, ..., 2d_1 - 1\}, \\ \cos^2\theta_2 & \text{pentru } i \in \{2d_1 + 1, ..., 2d_1 + 2d_2 - 1\}. \end{cases}$$

Relaţia (26) implică că

$$\widetilde{R}(e_i, e_j, e_i, e_j) = \frac{c+3}{4}(n^2 - n) + \frac{c-1}{4}[6(d_1 + d_2\cos^2\theta) - 2(n-1)]. \tag{27}$$

Notăm cu

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)).$$

Din relaţia (27), avem

$$\frac{c+3}{4} n(n-1) + \frac{c-1}{4}[6(d_1 + d_2\cos^2\theta) - 2n + 2] = 2\tau - n^2\|H\|^2 + \|h\|^2,$$

sau echivalent,

$$2\tau = n^2\|H\|^2 - \|h\|^2 + \frac{c+3}{4} n(n-1) + \frac{c-1}{4}[6(d_1 + d_2\cos^2\theta) - 2n + 2].$$

Considerăm

$$\begin{aligned}
\varepsilon \;=\; & 2\tau - \frac{n^2}{n-1}(n-2)\|H\|^2 - \frac{c+3}{4} n(n-1) \\
& - \frac{c-1}{4}[6(d_1 + d_2\cos^2\theta) - 2n + 2],
\end{aligned}$$

şi obţinem

$$n^2\|H\|^2 = (n-1)(\varepsilon + \|h\|^2). \tag{28}$$

Fie $p \in M$, $\pi \subset T_pM$, $\dim \pi = 2$, π ortogonal la ξ. Considerăm două cazuri:

i) π este tangent la $\mathcal{D}_1$. Se poate presupune $\pi = \mathrm{sp}\,\{e_1, e_2\}$. Considerăm $e_{n+1} = \dfrac{H}{\|H\|}$. Relaţia (28) devine

$$\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1}\right)^2 = (n-1)\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{2m+1}(h_{ij}^r)^2 + \varepsilon\right\},$$

sau echivalent,

$$(29)\ \left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1}\right)^2 = (n-1)\left\{\sum_{i=1}^{n}[(h_{ii}^{n+1})^2 + \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^r)^2 + \varepsilon\right\}.$$

Folosind lema 1, deducem din (29):

$$2h_{11}^{n+1}h_{22}^{n+1} \geq \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+2}^{2m+1}(h_{ij}^r)^2 + \varepsilon.$$

Din ecuaţia lui Gauss pentru $X = Z = e_1$, $Y = W = e_2$, obţinem

$$\begin{aligned} K(\pi) &= \frac{c+3}{4} + \sum_{r=n+1}^{2m+1}[h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2] \geq \frac{c+3}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+2}^{2m+1}(h_{ij}^r)^2 + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{r=n+2}^{2m+1}h_{11}^r h_{22}^r - \sum_{r=n+1}^{2m+1}(h_{12}^r)^2 \\ &= \frac{c+3}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{i,j>2}(h_{ij}^r)^2 + \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{2m+1}(h_{11}^r + h_{22}^r)^2 \\ &\quad + \sum_{j>2}[(h_{1j}^{n+1})^2 + (h_{2j}^{n+1})^2] + \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{c+3}{4} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

sau echivalent,

$$K(\pi) \geq \frac{c+3}{4} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \inf K - \tau \ \geq\ & \frac{c+3}{4} - \left\{\frac{c+3}{8}(n^2-n) + \frac{c-1}{8}[6(d_1 + d_2\cos^2\theta) - 2n + 2]\right\} \\ & - \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2. \end{aligned}$$

Ultima relaţie implică

$$\min_{\pi} K(\pi) \;=\; \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\}$$
$$-\frac{(c-1)}{4}[3(d_1 + d_2\cos^2\theta) - (n-1)].$$

ii) π este tangent la $\mathcal{D}_2$. Se poate presupune că $\pi = \mathrm{sp}\,\{e_1, e_2\}$.
Din ecuaţia lui Gauss pentru $X = Z = e_1$, $Y = W = e_2$, obţinem

$$\begin{aligned}
K(\pi) \;&=\; \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta\cdot\frac{c-1}{4} + \sum_{r=n+1}^{2m+1}[h^r_{11}h^r_{22} - (h^r_{12})^2] \\
&\geq \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta\cdot\frac{c-1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(h^{n+1}_{ij})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+2}^{2m+1}(h^r_{ij})^2 + \frac{\varepsilon}{2} \\
&+ \sum_{r=n+2}^{2m+1}h^r_{11}h^r_{22} - \sum_{r=n+1}^{2m+1}(h^r_{12})^2 \\
&= \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta\cdot\frac{c-1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(h^{n+1}_{ij})^2 + \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{i,j>2}(h^r_{ij})^2 \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{2m+1}(h^r_{11} + h^r_{22})^2 + \sum_{j>2}[(h^{n+1}_{1j})^2 + (h^{n+1}_{2j})^2] + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta\cdot\frac{c-1}{4} + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

sau echivalent,

$$K(\pi) \geq \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta\cdot\frac{c-1}{4} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci

$$\inf K - \tau \;\geq\; \frac{c+3}{4} + 3\cos^2\theta\cdot\frac{c-1}{4} - -\left\{\frac{c+3}{8}(n^2-n)\right.$$
$$\left.+\frac{c-1}{8}[6(d_1\cos^2\theta + d_2) - 2n + 2]\right\} - \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2.$$

Evident, ultima relaţie implică

$$\min_{\pi} K(\pi) \;=\; \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\}$$
$$-\frac{(c-1)}{4}[3(d_1\cos^2\theta + d_2) - (n-1)] + 3\cdot\frac{c-1}{4}.$$

Aceste relaţii reprezintă egalitatea ce trebuia demonstrată.

Cazul de egalitate într-un punct $p \in M$ are loc dacă şi numai dacă se obţine egalitate în precedenta inegalitate şi avem egalitate în lema 1

$$\begin{cases} h_{ij}^{n+1} = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j > 2, \\ h_{ij}^{r} = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j > 2, \quad r = n+1, ..., 2m+1, \\ h_{11}^{r} + h_{22}^{r} = 0, \quad \forall r = n+2, ..., 2m+1, \\ h_{1j}^{n+1} = h_{2j}^{n+1} = 0, \quad \forall j > 2, \\ h_{11}^{n+1} + h_{22}^{n+1} = h_{33}^{n+1} = \cdots = h_{nn}^{n+1}. \end{cases}$$

Se poate alege $\{e_1, e_2\}$ astfel încât $h_{12}^{n+1} = 0$ şi notăm $a = h_{11}^{r}$, $b = h_{22}^{r}$, $\mu = h_{33}^{n+1} = \cdots = h_{nn}^{n+1}$. Adică operatorii Weingarten au forma dorită ∎

Corolarul 14. *Fie M o CR subvarietate de contact n-dimensională ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$) a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$. Atunci, avem:*

$$\min_{\pi} K(\pi) = \tau - \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} - \frac{(c-1)}{4}[3(d_1+d_2) - (n+2)].$$

În particular, dacă $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, pentru subvarietatea oblică, se deduce teorema 1.

Corolarul 15. *Fie M o subvarietate invariantă $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$- dimensională $\widetilde{M}(c)$.*

Atunci avem:

$$\delta_M \leq \frac{(c+3)(n-2)(n+1)}{8} + \frac{(c-1)(n-7)}{8}.$$

Corolarul 16. *Fie M o subvarietate anti-invariantă n-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$.*

Atunci, avem:

$$\delta_M \leq \frac{n-2}{2}\left\{\frac{n^2}{n-1}\|H\|^2 + \frac{(c+3)(n+1)}{4}\right\} - \frac{(c-1)(n-1)}{4}.$$

Bibliografie

[1] D.E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Math. **509**, Springer, Berlin, 1976.

[2] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez, *Semi-slant submanifolds of a Sasakian manifold*, Geometriae Dedicata, **78** (1999), 183-199.

[3] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez, *Slant submanifolds in Sasakian space forms*, Glasgow Math. J. **42** (2000), 125-138.

[4] B.Y. Chen, *Geometry of Submanifolds and its Applications*, Science Univ. of Tokyo, 1981.

[5] B.Y. Chen, *Geometry of slant Submanifolds*, K.U. Leuven, 1990.

[6] B.Y. Chen, *Slant immersions*, Bull. Austral. Math. Soc. **41** (1990), 135-147.

[7] B.Y. Chen, *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds*, Arch. Math. **60** (1993), 568-578.

[8] B.Y. Chen, *Special slant surfaces and a basic inequality*, Results Math. **33** (1998), 65-78.

[9] B.Y. Chen, *Some new obstructions to minimal and Lagrangian isometric immersions*, Japan. J. Math. **26** (2000), 105-127.

[10] B.Y. Chen, Y. Tazawa, *Slant submanifolds in complex Euclidean spaces*, Tokyo J. Math. **14** (1991), 101-120.

[11] D. Cioroboiu, *B.Y. Chen inequalities for bi-slant submanifolds in Sasakian space forms*, Demonstratio Mathematica no. **1** (2003), Vol. **36**, 179-187.

[12] D. Cioroboiu, *B.Y. Chen inequalities for semi-slant submanifolds in Sasakian space forms*, I.J.M.M.S., no. **27** (2003), 1731-1738.

[13] D. Cioroboiu, *Submanifolds in Sasakian space forms*, Analele Universităţii Bucureşti Anul **L** , Nr. **2** (2001), 33-41.

[14] D. Cioroboiu, A. Oiaga, *B.Y. Chen inequalities for slant submanifolds in Sasakian space forms*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **52** (2003), 367-381.

[15] F. Defever, I. Mihai, L. Verstraelen, *B.Y. Chen's inequality for C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Boll. Un. Mat. Ital. **11** (1997), 365-374.

[16] A. Lotta, *Slant submanifolds in contact geometry*, Bull. Math. Soc. Roumanie **39** (1996), 183-198.

[17] I. Mihai, *Certain submanifolds of a Kaehler manifold*, Geometry and Topology of Submanifolds **VII**, World Scientific, Singapore, (1995), 186-188.

[18] A. Oiagă, *B.Y. Chen inequalities for slant submanifolds in generalized complex space forms*, Radovi Matematići **12** (2004), 215-231.

[19] A. Oiagă, I. Mihai, *B.Y. Chen inequalities for slant submanifolds in complex space forms*, Demonstratio Math. **32** (1999), 835-846.

[20] N. Papaghiuc, *Semi-slant submanifolds of a Kaehlerian manifold*, An. Şt. Univ. Al.I. Cuza Iaşi **40** (1994), 55-61.

[21] Y. Tazawa, *Construction of slant immersions*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **22** (1994), 153-166.

[22] Y. Tazawa, *Construction of slant immersions II*, Bull. Belg. Math. Soc. **1** (1994), 569-576.

[23] K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific, Singapore, 1984.

Capitolul 4

Margini ale curburii Ricci pe subvarietăţi oblice

1 Inegalităţi între curbura Ricci şi pătratul curburii medie

În aceast capitol, toate rezultatele aparţin autorului şi sunt demonstrate în lucrările: *Some inequalities for $k-$ Ricci curvature of certain submanifolds in Sasakian space forms*, Global Analysis, Differential Geometry Lie Algebras, Conference Applied Differential Geometry. General Relativity, BSG Proceedings **10**, Geometry Balkan Press (2004); *Shape operator A_H for C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Math. J. Toyama Univ. **26** (2003).

Chen stabileşte o relaţie optimă între curbura Ricci şi pătratul curburii medii pentru subvarietăţi ale unei forme spaţiale reale (a se vedea [4]).

Vom demonstra o inegalitate similară pentru subvarietăţi oblice, 2-oblice şi semioblice ale unei forme spaţiale Sasaki.

Vom considera subvarietăţi M tangente la câmpul vectorial Reeb ξ.

Teorema 1. *Fie M o subvarietate θ-oblică $(n = 2k+1)-$dimensională tangentă la ξ a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$. Atunci,*

(i) pentru fiecare vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ, avem

$$\mathrm{Ric}(X) \leq \frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3) + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 2)(c-1) + n^2\|H\|^2\right\}. \tag{1}$$

(ii) dacă $H(p) = 0$, atunci un vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ satisface cazul de egalitate din (1) dacă şi numai dacă $X \in \mathcal{N}_p$.

(iii) cazul de egalitate din (1) are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonali la ξ în p dacă şi numai dacă p este un punct total geodezic.

Demonstraţie. Fie $X \in T_pM$ un vector unitar X în p, ortogonal la ξ. Alegem o bază ortonormată $e_1, ..., e_n = \xi, e_{n+1}, ..., e_{2m+1}$ astfel încât $e_1, ..., e_n$ sunt tangenţi la M în p, cu $e_1 = X$.

Atunci, din ecuaţia lui Gauss, avem

$$(2)\quad n^2\|H\|^2 = 2\tau + \|h\|^2 - n(n-1)\frac{c+3}{4} - [3(n-1)\cos^2\theta - 2n + 2]\frac{c-1}{4}.$$

Din (2), deducem

$$\begin{aligned}(3)\qquad n^2\|H\|^2 &= 2\tau + \sum_{r=n+1}^{2m+1}[(h_{11}^r)^2 + (h_{22}^r + \cdots + h_{nn}^r)^2 + 2\sum_{i<j}(h_{ij}^r)^2] \\ &\quad -2\sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{2\le i<j\le n} h_{ii}^r h_{jj}^r - n(n-1)\frac{c+3}{4} \\ &\quad -[3(n-1)\cos^2\theta - 2n + 2]\frac{c-1}{4} \\ &= 2\tau + \frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{2m+1}[(h_{11}^r + \cdots + h_{nn}^r)^2 + (h_{11}^r - h_{22}^r - \cdots - h_{nn}^r)^2] \\ &\quad +2\sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{i<j}(h_{ij}^r)^2 - 2\sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{2\le i<j\le n} h_{ii}^r h_{jj}^r - n(n-1)\frac{c+3}{4} \\ &\quad -[3(n-1)\cos^2\theta - 2n + 2]\frac{c-1}{4}.\end{aligned}$$

Din ecuaţia lui Gauss, găsim

$$K_{ij} = \sum_{r=n+1}^{2m+1}[h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2] + 3\cos^2\theta \cdot \frac{c-1}{4} + \frac{c+3}{4}$$

şi, în consecinţă,

$$\begin{aligned}(4)\qquad \sum_{2\le i<j\le n} K_{ij} &= \sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{2\le i<j\le n}[h_{ii}^r h_{jj}^r - (h_{ij}^r)^2] + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{c+3}{4} \\ &\quad +[3(n-1)\cos^2\theta - 3\cos^2\theta - 2n + 4]\frac{c-1}{8}.\end{aligned}$$

Substituind (4) în (3), găsim

$$\frac{1}{2}n^2\|H\|^2 \ge 2\mathrm{Ric}\,(X) - 2(n-1)\frac{c+3}{4} - (3\cos^2\theta - 2)\frac{c-1}{4},$$

care este echivalentă cu (1).

(ii) Presupunem $H(p)=0$. Egalitatea are loc în (1) dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} h^r_{12}=\cdots=h^r_{1n}=0, \\ h^r_{11}=h^r_{22}+\cdots+h^r_{nn}, \quad r\in\{n+1,...,2m\}. \end{cases}$$

Atunci $h^r_{1j}=0$, pentru orice $j\in\{1,...,n\}$, $r\in\{n+1,...,2m\}$, adică $X\in\mathcal{N}_p$.

(iii) cazul de egalitate din (1) are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonali la ξ în p dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} h^r_{ij}=0, \quad i\neq j, \quad r\in\{n+1,...,2m\}, \\ h^r_{11}+\cdots+h^r_{nn}-2h^r_{ii}=0, \quad i\in\{1,...,n\}, \quad r\in\{n+1,...,2m\}. \end{cases}$$

În acest caz, deoarece ξ este tangent la M, rezultă că un punct total ombilical este şi total geodezic ∎

Teorema 2. *Fie M o subvarietate 2-oblică $(n=2d_1+2d_2+1)$-dimensională tangentă la ξ a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$. Atunci,*

(i) pentru fiecare vector unitar $X\in T_pM$ ortogonal la ξ

a) dacă X este tangent la $\mathcal{D}_1$ avem

$$\mathrm{Ric}\,(X)\leq\frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3)+\frac{1}{2}(3\cos^2\theta_1-2)(c-1)+n^2\|H\|^2\right\} \tag{5}$$

respectiv

b) dacă X este tangent la $\mathcal{D}_2$ avem

$$\mathrm{Ric}\,(X)\leq\frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3)+\frac{1}{2}(3\cos^2\theta_2-2)(c-1)+n^2\|H\|^2\right\}. \tag{6}$$

(ii) dacă $H(p)=0$, atunci un vector unitar $X\in T_pM$ ortogonal la ξ satisface cazul de egalitate din (5) sau (6) dacă şi numai dacă $X\in\mathcal{N}_p$.

(iii) cazul de egalitate din (5) şi (6) are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonali la ξ în p dacă şi numai dacă p este un punct total geodezic.

Demonstraţie. Fie $X\in T_pM$ un vector unitar X în p, ortogonal la ξ. Alegem o bază ortonormată $e_1,...,e_n=\xi,e_{n+1},...,e_{2m+1}$ astfel încât $e_1,...,e_n$ sunt tangenţi la M în p, cu $e_1=X$.

Atunci, din ecuaţia lui Gauss, avem

$$\begin{aligned} n^2\|H\|^2 \;=\; & 2\tau+\|h\|^2-n(n-1)\frac{c+3}{4} \\ & -[6(d_1\cos^2\theta_1+d_2\cos^2\theta_2)-2n+2]\frac{c-1}{4}. \end{aligned} \tag{7}$$

Din (7), avem

$$
\begin{aligned}
(8)\quad n^2\|H\|^2 &= 2\tau + \sum_{r=n+1}^{2m+1}[(h^r_{11})^2 + (h^r_{22}+\cdots+h^r_{nn})^2 + 2\sum_{i<j}(h^r_{ij})^2] \\
&\quad -2\sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{2\le i<j\le n} h^r_{ii}h^r_{jj} - n(n-1)\frac{c+3}{4} \\
&\quad -[6(d_1\cos^2\theta_1 + d_2\cos^2\theta_2) - 2n + 2]\frac{c-1}{4} \\
&= 2\tau + \frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{2m+1}[(h^r_{11}+\cdots+h^r_{nn})^2 + (h^r_{11}-h^r_{22}-\cdots-h^r_{nn})^2] \\
&\quad +2\sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{i<j}(h^r_{ij})^2 - 2\sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{2\le i<j\le n} h^r_{ii}h^r_{jj} - n(n-1)\frac{c+3}{4} \\
&\quad -[6(d_1\cos^2\theta_1 + d_2\cos^2\theta_2) - 2n + 2]\frac{c-1}{4}.
\end{aligned}
$$

Din ecuaţia Gauss, găsim:
a) dacă X este tangent la $\mathcal{D}_1$

$$K_{ij} = \sum_{r=n+1}^{2m+1}[h^r_{11}h^r_{22} - (h^r_{12})^2] + 3\cos^2\theta_1\cdot\frac{c-1}{4} + \frac{c+3}{4}$$

şi, în consecinţă,

$$
\begin{aligned}
(9)\quad \sum_{2\le i<j\le n} K_{ij} &= \sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{2\le i<j\le n}[h^r_{ii}h^r_{jj} - (h^r_{ij})^2] + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{c+3}{4} \\
&\quad +[6(d_1\cos^2\theta_1 + d_2\cos^2\theta_2) - 3\cos^2\theta_1 - 2n + 4]\frac{c-1}{8}.
\end{aligned}
$$

Substituind (9) în (8), deducem

$$\frac{1}{2}n^2\|H\|^2 \ge 2\mathrm{Ric}\,(X) - 2(n-1)\frac{c+3}{4} - (3\cos^2\theta_1 - 2)\frac{c-1}{4},$$

care este echivalent cu (5).

b) Similar, dacă X este tangent la $\mathcal{D}_2$, avem

$$K_{ij} = \sum_{r=n+1}^{2m+1}[h^r_{11}h^r_{22} - (h^r_{12})^2] + 3\cos^2\theta_2\cdot\frac{c-1}{4} + \frac{c+3}{4}$$

şi în consecinţă

$$\text{(10)}\quad \sum_{2\leq i<j\leq n} K_{ij} = \sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{2\leq i<j\leq n}[h^r_{ii}h^r_{jj}-(h^r_{ij})^2]+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{c+3}{4}$$
$$+[6(d_1\cos^2\theta_1+d_2\cos^2\theta_2)-3\cos^2\theta_2-2n+4]\frac{c-1}{8}.$$

Substituind (10) în (8), avem

$$\frac{1}{2}n^2\|H\|^2\geq 2\mathrm{Ric}\,(X)-2(n-1)\frac{c+3}{4}-(3\cos^2\theta_2-2)\frac{c-1}{4},$$

care este echivalent cu (6).

(ii) presupunem $H(p)=0$. În (5) şi (6) are loc egalitate dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} h^r_{12}=\cdots=h^r_{1n}=0, \\ h^r_{11}=h^r_{22}+\cdots+h^r_{nn}, \quad r\in\{n+1,...,2m\}\,. \end{cases}$$

Atunci $h^r_{1j}=0$, pentru orice $j\in\{1,...,n\}$, $r\in\{n+1,...,2m\}$, adică $X\in\mathcal{N}_p$.

(iii) cazul de egalitate în (5) sau (6) are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonali la ξ în p dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} h^r_{ij}=0, \quad i\neq j, \quad r\in\{n+1,...,2m\}\,, \\ h^r_{11}+\cdots+h^r_{nn}-2h^r_{ii}=0, \quad i\in\{1,...,n\}\,, \quad r\in\{n+1,...,2m\}\,. \end{cases}$$

În acest caz, deoarece ξ este tangent la M, rezultă că un punct total ombilical este total geodezic ∎

Teorema 3. *Fie M o subvarietate semioblică $(n=2d_1+2d_2+1)-$dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$. Atunci,*

(i) pentru fiecare vector unitar $X\in T_pM$ ortogonal la ξ

a) dacă X este tangent la $\mathcal{D}_1$ avem

$$\text{(11)}\qquad \mathrm{Ric}\,(X)\leq\frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3)-(c-1)+n^2\|H\|^2\right\}$$

respectiv

b) dacă X este tangent la $\mathcal{D}_2$ avem

$$\text{(12)}\quad \mathrm{Ric}\,(X)\leq\frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3)+\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-2)(c-1)+n^2\|H\|^2\right\}.$$

(ii) dacă $H(p)=0$, atunci un vector unitar $X\in T_pM$ ortogonal la ξ satisface cazul de egalitate în (11) sau (12) dacă şi numai dacă $X\in\mathcal{N}_p$.

(iii) cazul de egalitate în (11) *sau* (12) *are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonal la ξ în p dacă şi numai dacă p este un punct total geodezic.*

Demonstraţie. Fie $X \in T_pM$ un vector unitar X în p, ortogonal la ξ. Alegem o bază ortonormală $e_1, ..., e_n = \xi, e_{n+1}, ..., e_{2m+1}$ astfel încât $e_1, ..., e_n$ sunt tangenţi la M în p, cu $e_1 = X$.

Atunci, din ecuaţia lui Gauss, avem

$$(13)\quad n^2\|H\|^2 = 2\tau + \|h\|^2 - n(n-1)\frac{c+3}{4} - [6(d_1 + d_2\cos^2\theta) - 2n + 2]\frac{c-1}{4}.$$

Din (13), avem

$$\begin{aligned}(14)\; n^2\|H\|^2 \;=\;& 2\tau + \sum_{r=n+1}^{2m+1}[(h_{11}^r)^2 + (h_{22}^r + ... + h_{nn}^r)^2 + 2\sum_{i<j}(h_{ij}^r)^2] \\ & -2\sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{2\le i<j\le n} h_{ii}^r h_{jj}^r - n(n-1)\frac{c+3}{4} \\ & -[6(d_1 + d_2\cos^2\theta) - 2n + 2]\frac{c-1}{4} \\ =\;& 2\tau + \frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{2m+1}[(h_{11}^r + \cdots + h_{nn}^r)^2 + (h_{11}^r - h_{22}^r - \cdots - h_{nn}^r)^2] \\ & +2\sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{i<j}(h_{ij}^r)^2 - 2\sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{2\le i<j\le n} h_{ii}^r h_{jj}^r - n(n-1)\frac{c+3}{4} \\ & -[6(d_1 + d_2\cos^2\theta) - 2n + 2]\frac{c-1}{4}.\end{aligned}$$

Din ecuaţia lui Gauss, găsim:
a) dacă X este tangent la $\mathcal{D}_1$

$$K_{ij} = \sum_{r=n+1}^{2m+1}[h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2] + \frac{c+3}{4},$$

adică

$$\begin{aligned}(15)\quad \sum_{2\le i<j\le n} K_{ij} \;=\;& \sum_{r=n+1}^{2m+1}\sum_{2\le i<j\le n}[h_{ii}^r h_{jj}^r - (h_{ij}^r)^2] + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{c+3}{4} \\ & +[6(d_1 + d_2\cos^2\theta) - 2n + 4]\frac{c-1}{8}.\end{aligned}$$

Substituind (15) în (14), găsim

$$\frac{1}{2}n^2\|H\|^2 \ge 2\mathrm{Ric}\,(X) - (n-1)\frac{c+3}{2} - \frac{c-1}{2},$$

care este echivalentă cu (11).

b) Similar dacă X este tangent la $\mathcal{D}_2$, avem

$$K_{ij} = \sum_{r=n+1}^{2m+1} [h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2] + 3\cos^2\theta \cdot \frac{c-1}{4} + \frac{c+3}{4}$$

şi

$$\sum_{2\le i<j\le n} K_{ij} = \sum_{r=n+1}^{2m+1} \sum_{2\le i<j\le n} [h_{ii}^r h_{jj}^r - (h_{ij}^r)^2] + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{c+3}{4} + [6(d_1 + d_2\cos^2\theta) - 3\cos^2\theta - 2n + 4]\frac{c-1}{8}. \tag{16}$$

Substituind (16) în (14), găsim

$$\frac{1}{2}n^2\|H\|^2 \ge 2\mathrm{Ric}\,(X) - 2(n-1)\frac{c+3}{4} - (3\cos^2\theta - 2)\frac{c-1}{4},$$

care este echivalentă cu (12).

Demonstraţia din (ii) şi (iii) este similară cu cazurile corespunzătoare din teorema 1. În acest caz, deoarece ξ este tangent la M, avem că un punct total umbilical este total geodezic ■

Corolarul 4. *Fie M o subvarietate invariantă $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$. Atunci:*

(i) pentru fiecare vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ, avem

$$\mathrm{Ric}\,(X) \le \frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3) + \frac{1}{2}(c-1)\right\}. \tag{17}$$

(ii) un vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ satisface cazul de egalitate în (17) dacă şi numai dacă $X \in \mathcal{N}_p$.

(iii) cazul de egalitate în (17) are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonali la ξ în p dacă şi numai dacă p este un punct total geodezic.

Corolarul 5. *Fie M o subvarietate anti-invariantă $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensionale $\widetilde{M}(c)$. Atunci:*

(i) pentru fiecare vector unitar $X \in T_pM$ ortogonal la ξ, avem

$$\mathrm{Ric}\,(X) \le \frac{1}{4}\left\{(n-1)(c+3) - (c-1) + n^2\|H\|^2\right\}. \tag{18}$$

(ii) dacă $H(p) = 0$, atunci un vector unitar tangent $X \in T_pM$ ortogonal la ξ satisface cazul de egalitate în (18) dacă şi numai dacă $X \in \mathcal{N}_p$.

(iii) cazul de egalitate în (18) are loc pentru toţi vectorii unitari tangenţi ortogonali la ξ în p dacă şi numai dacă p este un punct total geodezic.

2 Inegalităţi între k-curbura Ricci şi pătratul curburii medie

În această secţiune, vom demonstra relaţia între k-curbura Ricci şi pătratul curburii medii pentru subvarietăţi oblice, 2-oblice şi semioblice ale unei forme spaţiale Sasaki.

Vom prezenta inegalitatea dintre curbura scalară şi pătratul curburii medie pentru subvarietăţi tangente la ξ.

Teorema 6. *Fie M o subvarietate θ-oblică $(n = 2k+1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$. Atunci*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2\tau}{n(n-1)} - \frac{c+3}{4} - \frac{[3(n-1)\cos^2\theta - 2n + 2](c-1)}{4n(n-1)}. \tag{19}$$

Demonstraţie. Alegem o bază ortonormată $\{e_1, ..., e_n = \xi, e_{n+1}, ..., e_{2m+1}\}$ în p astfel încât e_{n+1} este paralel cu vectorul curbura medie $H(p)$ şi $e_1, ..., e_n$ diagonalizează operatorul Weingarten A_{n+1}. Atunci operatorii Weingarten au următoarea formă

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$A_r = (h^r_{ij}), \quad i, j = 1, ..., n, \quad r = n+2, ..., 2m+1, \quad \operatorname{trace} A_r = \sum_{i=1}^n h^r_{ii} = 0.$$

Din (2), avem

$$\begin{aligned} n^2\|H\|^2 \; &= \; 2\tau + \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{r=n+2}^{2m+1} \sum_{i,j=1}^n (h^r_{ij})^2 - n(n-1)\frac{c+3}{4} \\ &\quad -[3(n-1)\cos^2\theta - 2n + 2]\frac{c-1}{4}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, deoarece

$$0 \leq \sum_{i<j}(a_i - a_j)^2 = (n-1)\sum_i a_i^2 - 2\sum_{i<j} a_i a_j,$$

obţinem

$$n^2 \|H\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

care implică

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq n \left\| H \right\|^2 .$$

Deci, avem

$$n^2 \|H\|^2 \geq 2\tau + n\|H\|^2 - n(n-1)\frac{c+3}{4} - [3(n-1)\cos^2\theta - 2n+2]\frac{c-1}{4},$$

care este echivalent cu (19).

Fie $\{e_1, ...e_n\}$ o bază ortonormată a lui T_pM. Notăm cu $L_{i_1...i_k}$ k-secţiunea plană generată de $e_{i_1}, ..., e_{i_k}$. Avem

$$\tau(L_{i_1...i_k}) = \frac{1}{2} \sum_{i\in\{i_1,...,i_k\}} \mathrm{Ric}_{\,L_{i_1...i_k}}(e_i), \tag{20}$$

$$\tau(p) = \frac{1}{C_{n-2}^{k-2}} \sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} \tau(L_{i_1...i_k}). \tag{21}$$

Combinând (20) şi (21), găsim

$$\tau(p) \geq \frac{n(n-1)}{2}\Theta_k(p) \;\blacksquare \tag{22}$$

Din (20), (21) şi (19), obţinem

Teorema 7. *Se consideră M o subvarietate 2-oblică $(n = 2d_1 + 2d_2 + 1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensionale $\widetilde{M}(c)$. Atunci, avem*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2\tau}{n(n-1)} - \frac{c+3}{4} - \frac{[3(d_1\cos^2\theta_1 + d_2\cos^2\theta_2) - n+1](c-1)}{2n(n-1)}.$$

Demonstraţie. Demonstraţia este similară cu cea a teoremei 6 $\blacksquare$

Teorema 8. *Considerăm M o subvarietate semioblică $(n = 2d_1 + 2d_2 + 1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensionale $\widetilde{M}(c)$. Atunci*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2\tau}{n(n-1)} - \frac{c+3}{4} - \frac{[3(d_1 + d_2\cos^2\theta) - n+1](c-1)}{2n(n-1)}.$$

Demonstraţie. Demonstraţia este similară cu cea corespunzătoare teoremei 6 $\blacksquare$

Teorema 9. *Fie M o subvarietate θ-oblică $(n = 2t+1)-$dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensionale $\widetilde{M}(c)$. Atunci, pentru orice întreg k, $2 \leq k \leq n$, şi orice punct $p \in M$, avem*

$$\|H\|^2(p) \geq \Theta_k(p) - \frac{c+3}{4} - \frac{[3(n-1)\cos^2\theta - 2n + 2](c-1)}{4n(n-1)}.$$

Teorema 10. *Fie M o subvarietate 2-oblică $(n = 2d_1 + 2d_2 + 1)-$dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensionale $\widetilde{M}(c)$. Atunci, pentru orice întreg k, $2 \leq k \leq n$, şi orice punct $p \in M$, avem*

$$\|H\|^2(p) \geq \Theta_k(p) - \frac{c+3}{4} - \frac{[3(d_1\cos^2\theta_1 + d_2\cos^2\theta_2) - n + 1](c-1)}{2n(n-1)}.$$

Teorema 11. *Fie M o subvarietate semioblică $(n = 2d_1 + 2d_2 + 1)$-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensionale $\widetilde{M}(c)$. Atunci, pentru orice întreg k, $2 \leq k \leq n$, şi orice punct $p \in M$, avem*

$$\|H\|^2(p) \geq \Theta_k(p) - \frac{c+3}{4} - \frac{[3(d_1 + d_2\cos^2\theta) - n + 1](c-1)}{2n(n-1)}.$$

Corolarul 12. *Fie M o subvarietate invariantă n-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$. Atunci, pentru orice întreg k, $2 \leq k \leq n$, şi orice punct $p \in M$, avem*

$$\Theta_k(p) \leq \frac{c+3}{4} + \frac{c-1}{4n}.$$

Corolarul 13. *Fie M o subvarietate anti-invariantă n-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$. Atunci, pentru orice întreg k, $2 \leq k \leq n$, şi orice punct $p \in M$, avem*

$$\|H\|^2(p) \geq \Theta_k(p) - \frac{c+3}{4} + \frac{c-1}{2n}.$$

Corolarul 14. *Fie M o CR subvarietate de contact n-dimensională ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$) a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$. Atunci, pentru orice întreg k, $2 \leq k \leq n$, şi orice punct $p \in M$, avem*

$$\|H\|^2(p) \geq \Theta_k(p) - \frac{c+3}{4} - \frac{(3d_1 - n + 1)(c-1)}{2n(n-1)},$$

unde $2d_1 = \dim \mathcal{D}_1$.

Bibliografie

[1] D.E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Math. **509**, Springer, Berlin, 1976.

[2] B.Y. Chen, *Geometry of Slant Submanifolds*, K.U. Leuven, 1990.

[3] B.Y. Chen, *Slant immersions*, Bull. Austral. Math. Soc. **41** (1990), 135-147.

[4] B.Y. Chen, *Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions*, Glasgow Math. J. **41** (1999), 33-41.

[5] D. Cioroboiu, *Some inequalities for $k-$ Ricci curvature of certain submanifolds in Sasakian space forms*, Global Analysis, Differential Geometry Lie Algebras, Conference Applied Differential Geometry. General Relativity, BSG Proceedings **10**, Geometry Balkan Press (2004), 59-65

[6] D. Cioroboiu, *Shape operator A_H for C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Math. J. Toyama Univ. **26** (2003).

[7] F. Defever, I. Mihai, L. Verstraelen, *A class of C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, J. Australian Math. Soc. **64** (1998), 120-128.

[8] F. Dillen, L. Vrancken, *C-totally real submanifolds of Sasakian space forms*, J. Math. Pures Appl. **69** (1990), 85-93.

[9] K. Matsumoto, I. Mihai, A. Oiagă, *Shape operator A_H for slant submanifolds in complex space forms*, Bull. Yamagata Univ. **14** (2000), 169-177.

[10] K. Matsumoto, I. Mihai, A. Oiagă, *Ricci curvature of submanifolds in complex space forms*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **10** (2001), 775-782.

[11] N. Papaghiuc, *Some remarks on CR-submanifolds of a locally conformal Kaehler manifold with parallel Lee form*, Publ. Math. Debrecen **43** (1993), 337-341.

[12] S. Tanno, *Sasakian manifolds with constant ϕ-holomorphic sectional curvature*, Tohoku Math. J. **21** (1969), 501-507.

[13] K. Yano, M. Kon, *Anti-invariant Submanifolds*, M. Dekker, New York, 1976.

[14] K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific, Singapore, 1984.

Capitolul 5
Inegalităţi asociate operatorului Weingarten A_H pe subvarietăţi C-total reale în forme spaţiale Sasaki

1 Relaţii optime între curbura secţională şi operatorul Weingarten

În aceast capitol, toate rezultatele aparţin autorului şi sunt demonstrate în lucrările: *Some inequalities for $k-$ Ricci curvature of certain submanifolds in Sasakian space forms*, Global Analysis, Differential Geometry Lie Algebras, Conference Applied Differential Geometry. General Relativity, BSG Proceedings **10**, Geometry Balkan Press (2004); *Shape operator A_H for C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Math. J. Toyama Univ. **26** (2003).

B.Y. Chen stabileşte o relaţie optimă între curbura secţională, K şi operatorul Weingarten A_H pentru subvarietăţi în forme spaţiale reale [3].

Demonstrăm o inegalitate similară pentru o subvarietate C-total reală M a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ cu curbura ϕ secţională constantă c.

Teorema 1. *Fie $x\colon M \to \widetilde{M}(c)$ o imersie izometrică a unei subvarietăţi C-total reale n-dimensională a unei forme spaţiale Sasaki $(2m+1)$-dimensionale $\widetilde{M}(c)$ cu curbura ϕ secţională constantă c. Dacă există un punct $p \in M$ şi un număr $b > \frac{1}{4}(c+3)$ astfel încât $K \geq b$ în p, atunci operatorul Weingarten în vectorul curbură medie H satisface*

$$A_H > \frac{n-1}{n}[b - \frac{1}{4}(c+3)] \cdot I_n \quad \text{în} \quad p, \tag{1}$$

adică diferenţa

$$A_H - \frac{n-1}{n}[b - \frac{1}{4}(c+3)] \cdot I_n \quad \text{în} \quad p,$$

este pozitiv definită, unde I_n este funcţia identitate.

Demonstraţie. Fie $p \in M$ şi un număr $b > \frac{1}{4}(c+3)$ astfel încât $K \geq b$ în p. Alegem o bază ortonormată $\{e_1, ..., e_n = \xi, e_{n+1}, ..., e_{2m+1}\}$ în p astfel încât e_{n+1} este paralel la vectorul curbura medie $H(p)$ şi $e_1, ..., e_n$ diagonalizează operatorul Weingarten A_{n+1}. Atunci, operatorii Weingarten au forma

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$A_r = (h_{ij}^r), \quad i, j = 1, ..., n, \quad r = n+2, ..., 2m+1, \quad \operatorname{trace} A_r = \sum_{i=1}^{n} h_{ii}^r = 0.$$

Pentru $i \neq j$, notăm

$$u_{ij} = a_i a_j. \tag{2}$$

Din ecuaţia Gauss pentru $X = Z = e_i$, $Y = W = e_j$, găsim

$$u_{ij} \geq b - \frac{1}{4}(c+3) - \sum_{r=n+2}^{2m+1} [h_{ii}^r h_{jj}^r - (h_{ij})^2]. \tag{3}$$

u_{ij} au următoarele **proprietăţi**:

1. pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$ fixat, avem $\sum_{i \neq j} u_{ij} \geq (n-1)\left[b - \frac{1}{4}(c+3)\right]$;

2. $u_{ij} \neq 0$, pentru $i \neq j$;

3. pentru $i, j, k \in \{1, ..., n\}$ distincţi, $a_i^2 = \dfrac{u_{ij} u_{ik}}{u_{jk}}$;

4. Notăm $S_k = \{B \subset \{1, ..., n\}; |B| = k\}$ şi $\bar{B} = \{1, ..., n\} \backslash B$, pentru orice $B \in S_k$. Atunci, pentru un k, $1 \leq k \leq \left[\dfrac{n}{2}\right]$, fixat şi pentru fiecare $B \in S_k$, avem $\sum_{j \in B} \sum_{t \in \bar{B}} u_{jt} > 0$.

5. pentru $i, j \in \{1, ..., n\}$ distincţi, $u_{ij} > 0$,

   pe care le demonstrăm în cele ce urmează.

1. Din relaţiile (2) şi (3), avem:

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq j} u_{ij} \ &\geq \ (n-1)\left[b-\frac{1}{4}(c+3)\right]-\sum_{r=n+2}^{2m+1}\left[h_{ii}^r\left(\sum_{j\neq i} h_{jj}^r\right)-\sum_{j\neq i}(h_{ij})^2\right]\\ &= (n-1)[b-\frac{1}{4}(c+3)]-\sum_{r=n+2}^{2m+1}\left[h_{ii}^r(-h_{ii}^r)-\sum_{j\neq i}(h_{ij})^2\right]\\ &= (n-1)\left[b-\frac{1}{4}(c+3)\right]+\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{j=1}^{n}(h_{ij})^2\\ &\geq \ (n-1)\left[b-\frac{1}{4}(c+3)\right]>0.\end{aligned}$$

2. dacă $u_{ij}=0$, pentru $i\neq j$, atunci $a_i=0$ sau $a_j=0$.
$a_i=0$ implică $u_{it}=a_ia_t=0$, $\forall t\in\{1,...,n\}$, $t\neq i$. Avem $\sum\limits_{j\neq i} u_{ij}=0$, în contradicţie cu 1.

3. $\dfrac{u_{ij}u_{ik}}{u_{jk}}=\dfrac{a_ia_ja_ia_k}{a_ja_k}=a_i^2.$

4. Fie $B=\{1,...,k\}$ şi $\bar{B}=\{k+1,...,n\}$. Atunci

$$\begin{aligned}\sum_{j\in B}\sum_{t\in\bar{B}} u_{jt} \ &\geq \ k(n-k)\left[b-\frac{1}{4}(c+3)\right]-\sum_{r=n+2}^{2m+1}\left[h_{ii}^r(-h_{ii}^r)-\sum_{j\neq i}(h_{ij})^2\right]\\ &-\sum_{r=n+2}^{2m+1}\left\{\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=k+1}^{n}[h_{ii}^rh_{tt}^r-(h_{jt}^r)^2]\right\}.\end{aligned}$$

Fie $\{e_1,...,e_n\}$ o bază ortonormată. Obţinem

$$\begin{aligned}\sum_{j\in B}\sum_{t\in\bar{B}} u_{jt} &\geq k(n-k)\left[b-\frac{1}{4}(c+3)\right]+\sum_{r=n+2}^{2m+1}\left[\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=k+1}^{n}(h_{jt}^r)^2+\sum_{j=1}^{k}(h_{jj}^r)^2\right]\\ &\geq k(n-k)\left[b-\frac{1}{4}(c+3)\right]>0.\end{aligned}$$

5. Presupunem $u_{1n}<0$. Din 3, găsim $u_{1i}u_{in}<0$, pentru $1<i<n$. Fără a restrânge generalizarea, se poate presupune

$$\left\{\begin{array}{l} u_{12},...,u_{1l},u_{(l+1)n},...u_{(n-1)n}>0,\\ u_{1(l+1)},...,u_{1n},u_{2n},...u_{ln}<0,\end{array}\right. \tag{4}$$

pentru $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\leq l\leq n-1$.

Dacă $l = n-1$, atunci $u_{1n}+u_{2n}+\cdots+u_{(n-1)n} < 0$, care contrazice 1. Astfel, $l < n-1$.

Din 3, găsim:

$$a_n^2 = \frac{u_{in}u_{tn}}{u_{it}} > 0, \tag{5}$$

unde $2 \le i \le l$, $l+1 \le t \le n-1$. Folosind (4) şi (5), obţinem $u_{it} < 0$, care implică

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{t=l+1}^{n} u_{it} = \sum_{i=2}^{l}\sum_{t=l+1}^{n-1} u_{it} + \sum_{i=2}^{l} u_{in} + \sum_{t=l+1}^{n} u_{1t} < 0.$$

Aceasta contrazice 4.

Acum, ne reîntoarcem la demonstraţia teoremei 1. Din 5, avem că $a_1, ..., a_n$ au acelaşi semn. Presupunem $a_j > 0$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$. Atunci

$$\sum_{j\neq i} u_{ij} = a_i(a_1+\cdots+a_n) - a_i^2 \ge (n-1)\left[b - \frac{1}{4}(c+3)\right].$$

Din relaţia precedentă şi din (1), avem

$$a_i n\,\|H\| > \frac{n-1}{n}\left[b - \frac{1}{4}(c+3)\right] \blacksquare$$

2 Relaţii optime între k-curbura Ricci şi operatorul Weingarten

B.Y. Chen stabileşte o relaţie dintre k-curbura Ricci şi operatorul Weingarten pentru o subvarietate de codimensiune arbitrară. Vom demonstra inegalitatea corespunzătoare pentru o subvarietate C-total reală M a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$.

Teorema 2. *Se consideră $x\colon M \to \widetilde{M}(c)$ o imersie izometrică a unei subvarietăţi C-total reale n-dimensională într-o formă spaţială Sasaki $(2m+1)$-dimensională $\widetilde{M}(c)$ cu curbura ϕ secţională constantă c. Fie $\Theta_k(p)$ un invariant Chen. Atunci, pentru orice întreg k, $2 \le k \le n$, şi orice punct $p \in M$, avem:*

i) dacă $\Theta_k(p) \neq \frac{1}{4}(c+3)$, atunci operatorul Weingarten în vectorul curbură medie H satisface

$$A_H > \frac{n-1}{n}\left[\Theta_k(p) - \frac{1}{4}(c+3)\right]\cdot I_n \text{ în } p; \tag{6}$$

sau, diferenţa

$$A_H - \frac{n-1}{n}\left[\Theta_k(p) - \frac{1}{4}(c+3)\right] \cdot I_n \text{ în } p, \tag{7}$$

este pozitiv definită.

ii) dacă $\Theta_k(p) = \frac{1}{4}(c+3)$, *atunci* $A_H \geq 0$ *în* p;

iii) un vector unitar $X \in T_pM$ *satisface*

$$A_H X = \frac{n-1}{n}\left[\Theta_k(p) - \frac{1}{4}(c+3)\right] X \tag{8}$$

dacă şi numai dacă $\Theta_k(p) = \frac{1}{4}(c+3)$ *şi* $X \in N(p)$;

iv) $A_H = \frac{n-1}{n}\left[\Theta_k(p) - \frac{1}{4}(c+3)\right] \cdot I_n$ *în* p *dacă şi numai dacă* p *este un punct total geodezic.*

Demonstraţie. i) Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază ortonormată a lui T_pM. Notăm cu $L_{i_1 \ldots i_k}$ k-secţiunea plană generată de $e_{i_1}, ..., e_{i_k}$. Este uşor de văzut din definiţie

$$\tau(L_{i_1 \ldots i_k}) = \frac{1}{2} \sum_{t \in \{i_1, \ldots, i_k\}} \mathrm{Ric}_{L_{i_1 \ldots i_k}}(e_i), \tag{9}$$

$$\tau(p) = \frac{1}{C_{n-2}^{k-2}} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \tau(L_{i_1 \ldots i_k}). \tag{10}$$

Combinând (9) şi (10), găsim

$$\tau(p) \geq \frac{n(n-1)}{2} \Theta_k(p). \tag{11}$$

Din ecuaţia lui Gauss pentru $X = Z = e_i$, $Y = W = e_j$, prin sumare, obţinem:

$$n^2 \|H\|^2 = 2\tau + \|h\|^2 - n(n-1)\frac{c+3}{4}. \tag{12}$$

Alegem o bază ortonormală $\{e_1, ..., e_n = \xi, e_{n+1}, ..., e_{2m+1}\}$ în p astfel încât e_{n+1} este paralel cu vectorul curbură medie $H(p)$ şi $e_1, ..., e_n$ diagonalizează operatorul Weingarten A_{n+1}.

Din (12), găsim

$$n^2 \|H\|^2 = 2\tau + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{r=n+2}^{2m+1} \sum_{i,j=1}^{n} (h_{ij}^r)^2 - n(n-1)\frac{c+3}{4}. \tag{13}$$

Pe de altă parte, deoarece

$$0 \leq \sum_{i<j}(a_i - a_j)^2 = (n-1)\sum_i a_i^2 - 2\sum_{i<j} a_i a_j,$$

obţinem

$$n^2 \|H\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j \leq n\sum_{i=1}^n a_i^2,$$

care implică

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq n\|H\|^2.$$

Avem din (13)

$$n^2\|H\|^2 \geq 2\tau + n\|H\|^2 - n(n-1)\frac{c+3}{4},$$

sau, echivalent,

$$\|H\|^2 \geq \frac{2\tau}{n(n-1)} - \frac{c+3}{4}. \tag{14}$$

Din (11) şi (14), obţinem

$$\|H\|^2(p) \geq \Theta_k(p) - \frac{c+3}{4}.$$

Aceasta arată că $H(p) = 0$ dacă şi numai dacă

$$\Theta_k(p) \leq \frac{c+3}{4}.$$

În consecinţă, dacă $H(p) = 0$, proprietăţile $i)$ şi $ii)$ au loc. Adică, păstrând generalitatea, se poate presupune $H(p) \neq 0$.

Din ecuaţia lui Gauss, găsim

$$a_i a_j \geq K_{ij} - \frac{c+3}{4} - \sum_{r=n+2}^{2m+1}[h_{ii}^r h_{jj}^r - (h_{ij}^r)^2]. \tag{15}$$

Cu (15), obţinem

$$a_1(a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}) \geq \mathrm{Ric}_{L_{i_1\ldots i_k}}(e_1) - (k-1)\frac{c+3}{4} - \sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{j=2}^{k}[h_{11}^r h_{i_j i_j}^r - (h_{1 i_j}^r)^2],$$

care implică

$$\begin{aligned}(16)\quad a_1(a_2+\cdots+a_n) \;\geq\; & \frac{1}{C_{n-2}^{k-2}}\sum_{2\leq i_2<\ldots<i_k\leq n}\mathrm{Ric}_{L_{i_1\ldots i_k}}(e_1)-(n-1)\frac{c+3}{4}\\ & +\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{j=2}^{n}(h_{1j}^r)^2.\end{aligned}$$

Găsim astfel

$$a_1(a_2+\cdots+a_n)\geq(n-1)\left[\Theta_k(p)-\frac{c+3}{4}\right].$$

Atunci

$$\begin{aligned}(17)\qquad a_1(a_2+\cdots+a_n) \;=\; & a_1^2+a_1(a_2+\cdots+a_n)\\ & \geq a_1^2+(n-1)\left[\Theta_k(p)-\frac{c+3}{4}\right]\\ & \geq (n-1)\left[\Theta_k(p)-\frac{c+3}{4}\right].\end{aligned}$$

Deoarece $n\left\|H\right\|=a_1+\cdots+a_n$, relaţia de mai sus implică

$$A_H\geq\frac{n-1}{n}\left[\Theta_k(p)-\frac{c+3}{4}\right]\cdot I_n$$

Egalitatea nu poate avea loc în cazul în care $H(p)\neq 0$.

Afirmaţia *ii*) este imediată.

iii) Fie $X\in T_pM$ un vector unitar satisfăcând (8). Din (17) şi (16), rezultă $a_1=0$ şi respectiv $h_{1j}^r=0$, $\forall j\in\{1,...,n\}$, $r\in\{n+2,...,2m+1\}$. Condiţiile de mai sus implică

$$\Theta_k(p)=\frac{c+3}{4}$$

şi $X\in N(p)$.

Implicaţia inversă este clară.

iv) Egalitatea (8) are loc pentru orice $X\in T_pM$ dacă şi numai dacă $N(p)=T_pM$, adică p este un punct total geodezic ■

Bibliografie

[1] D.E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Math. **509**, Springer, Berlin, 1976.

[2] B.Y. Chen, *Geometry of Slant Submanifolds*, K.U. Leuven, 1990.

[3] B.Y. Chen, *Mean curvature and shape operator of isometric immersions in real-space-forms*, Glasgow Math. J. **38** (1996), 87-97.

[4] B.Y. Chen, *Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions*, Glasgow Math. J. **41** (1999), 33-41.

[5] B.Y. Chen, *Riemannian Submanifolds. Handbook of Differential Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[6] D. Cioroboiu, *Some inequalities for $k-$ Ricci curvature of certain submanifolds in Sasakian space forms*, Global Analysis, Differential Geometry Lie Algebras, Conference Applied Differential Geometry. General Relativity, BSG Proceedings **10**, Geometry Balkan Press (2004), 59-65

[7] D. Cioroboiu, *Shape operator A_H for C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Math. J. Toyama Univ. **26** (2003).

[8] F. Defever, I. Mihai, L. Verstraelen, *A class of C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, J. Australian Math. Soc. **64** (1998), 120-128.

[9] F. Dillen, L. Vrancken, *C-totally real submanifolds of Sasakian space forms*, J. Math. Pures Appl. **69** (1990), 85-93.

[10] K. Matsumoto, I. Mihai, A. Oiagă, *Shape operator A_H for slant submanifolds in complex space forms*, Bull. Yamagata Univ. **14** (2000), 169-177.

[11] K. Matsumoto, I. Mihai, A. Oiagă, *Ricci curvature of submanifolds in complex space forms*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **10** (2001), 775-782.

[12] N. Papaghiuc, *Some remarks on CR-submanifolds of a locally conformal Kaehler manifold with parallel Lee form*, Publ. Math. Debrecen **43** (1993), 337-341.

[13] K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific, Singapore, 1984.

Capitolul 6
Curbura scalară pentru subvarietăţi C-total reale în forme spaţiale Sasaki

1 Funcţii eliptice Jacobi

În aceast capitol, toate rezultatele aparţin autorului şi sunt demonstrate în lucrările: *Scalar curvature of C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Differential Geometry-Dynamical Systems, Vol. **4**, No. **1** (2002), 5-11; *C-totally real submanifolds of $\mathbf{R}^{2n+1}$ satisfying a certain inequality*, Balkan J. Geom. Appl. **7**, No.**1** (2002), 55-62.

Vom reaminti pe scurt câteva rezultate cunoscute privind *funcţiile eliptice Jacobi* pentru a le folosi mai târziu [2].

Punem

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{1}$$
$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

unde x şi k satisfac $0 < k < 1$, $-1 \leq x \leq 1$. Ecuaţia (1) defineşte u ca o funcţie pară, crescătoare de la 0 la K, iar x este pozitivă, crescătoare de la 0 la 1. Reciproc, aceeaşi ecuaţie defineşte x ca o funcţie pară de u, crescătoare de la 0 la 1, iar u crescătoare de la 0 la K; această funcţia este cunoscută ca fiind *funcţia eliptică Jacobi*, notată prin $sn(u, k)$ (sau mai simplu prin $sn(u)$), deci putem considera

$$u = sn^{-1}(x), \quad x = sn(u).$$

Alte două funcţii Jacobi principale $cn(u,k)$ şi $dn(u,k)$ (notate cu $sn(u)$ şi respectiv $dn(u)$) sunt definite prin

$$cn(u) = \sqrt{1 - sn^2(u)}, \qquad dn(u) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u)}.$$

Fie $k' = \sqrt{1-k^2}$ modulul complementar. Atunci $dn(u) \geq k' > 0$.

Remarcă. *Fie $a > 1$. Considerăm*

$$\mu_a = \frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}\, cn\left(ax, \frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}\right).$$

Notăm cu P_a^n produsul warped $I \times_{\mu_a} S^{n-1}\left(\frac{a^4-1}{4}\right)$ cu funcţia warped μ_a pentru $n \geq 3$ şi P_a^2 produsul warped $I \times_{\mu_a} \mathbf{R}$.

Tensorul metric g pe P_a^n este dat de

$$g = dx^2 + \mu_a^2 g_0,$$

unde x este coordonata canonică a lui I şi g_0 este tensorul metric standard pe $S^{n-1}\left(\frac{a^4-1}{4}\right)$ sau respectiv $\mathbf{R}$. Deoarece $S^{n-1}\left(\frac{a^4-1}{4}\right)$ este conform plată, există un sistem local de coordonate $\{u_2, ..., u_n\}$ astfel încât tensorul metric g_0 este dat de

$$g_0 = E^2(du_2^2 + du_3^2 + \cdots + du_n^2).$$

Când $n = 2$, se poate alege $E = 1$. Deci, tensorul metric al lui P_a^n este dat de

$$g = dx^2 + \mu_a^2 E^2(du_2^2 + du_3^2 + \cdots + du_n^2).$$

Fie

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{1}{E\mu_a}\frac{\partial}{\partial u_2}, \quad ..., \quad e_n = \frac{1}{E\mu_a}\frac{\partial}{\partial u_n}.$$

Atunci $\{e_1, ..., e_n\}$ formează un reper ortonormat pe P_a^n.

Se defineşte o funcţie simetrică biliniară $\sigma : TP_a^n \times TP_a^n \longrightarrow TP_a^n$, prin

(2)
$$\sigma(e_1, e_1) = 3\mu_a e_1, \qquad \sigma(e_1, e_i) = \sigma(e_i, e_1) = \mu_a e_i,$$
$$\sigma(e_i, e_j) = \delta_{ij}\mu_a e_1, \qquad i, j = 2, ..., n.$$

În aceste condiţii, $g(\sigma(X,Y),Z)$ este liniară şi total simetrică în X, Y, Z.

Există atunci o imersie izometrică C-total reală $p_a : P_a^n \longrightarrow S^{2n+1}$ a cărei formă a doua fundamentală este dată de $h = \varphi\sigma$, unde σ se defineşte prin (2).

Aplicând ecuaţia lui Gauss şi (2), obţinem cazul de egalitate pentru imersia izometrică C-total reală.

Un câmp ortonormat $e_1, ..., e_n, e_{1*}, ..., e_{n*}, e_{2n+1}$ se numeşte *reper vectorial adaptat* dacă $e_1, ..., e_n$ sunt câmpuri vectoriale ortonormate tangente şi $e_{1*}, ..., e_{n*}$ câmpuri normale vectoriale date de

$$e_{1*} = \varphi e_1, \quad ..., \quad e_{n*} = \varphi e_n, \quad e_{2n+1} = \xi.$$

2 Optimizări de curburi pentru subvarietăţi C-total reale

Teorema 1. *Dacă M^n este o subvarietate C-total reală a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$, atunci curbura medie $\|H\|$ şi curbura scalară τ ale lui M satisfac*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(n+2)}{n^2(n-1)}\tau - \left(\frac{n+2}{n}\right)\left(\frac{c+3}{4}\right) \tag{3}$$

Mai mult, egalitatea are loc dacă şi numai dacă, în raport cu un reper adaptat $e_1, ..., e_n, e_{1*}, ..., e_{n*}, e_{2n+1}$ cu e_{1*} paralel la H, forma a doua fundamentală a lui M^n în $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$ are următoarea formă:

$$\begin{aligned} &h(e_1, e_1) = 3\lambda e_{1*}, \quad h(e_2, e_2) = \cdots = h(e_n, e_n) = \lambda e_{1*}, \\ &h(e_1, e_j) = \lambda e_{j*}, \quad h(e_j, e_k) = 0, 2 \leq j \neq k \leq n, \\ &h(e_i, \xi) = e_{i*}, \quad h(e_{i*}, \xi) = -e_i, \end{aligned}$$

cu $\lambda \in C^\infty(M)$.

Demonstraţie. Fie M^n o subvarietate C-total reală a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$ şi $\{e_1, ..., e_n, e_{1*}, ..., e_{n*}, e_{2n+1} = \xi\}$ un reper local adaptat pe M^n. Considerăm $h^i_{jk} = (h(e_j, e_k), e_{i*})$. Din

$$A_{\varphi X}Y = -\varphi h(X, Y) = A_{\varphi Y}X, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM), \quad X, Y \perp \xi,$$

rezultă

$$h^i_{jk} = h^j_{ik} = h^k_{ij}, \quad i, j, k = 1, ..., n.$$

Din definiţia funcţiei curbură medie, avem

$$n^2 \|H\|^2 = \sum_i \left(\sum_j \left(h^i_{jj}\right)^2 + 2 \sum_{j<k} h^i_{jj} h^i_{kk} \right).$$

Din ecuaţia lui Gauss, avem

$$\begin{aligned}2\tau \;=\; & n(n-1)\frac{c+3}{4}+n^2\|H\|^2-|h|^2=n(n-1)\frac{c+3}{4}\\ & +n^2\|H\|^2-\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(h^i_{jk}\right)^2.\end{aligned}$$

Astfel, aplicând relaţiile precedente, obţinem

$$\tau=\frac{n(n-1)}{2}\frac{c+3}{4}+\sum_i\sum_{j<k}h^i_{jj}h^i_{kk}-\sum_{i\neq j}\left(h^i_{jj}\right)^2-3\sum_{i<j<k}\left(h^i_{jk}\right)^2.$$

Fie $m=\dfrac{n+2}{n-1}$. Atunci, găsim

$$\begin{aligned}n^2\|H\|^2 \;-\; & m\left(2\tau-n(n-1)\frac{c+3}{4}\right)\\ =\; & \sum_i\left(h^i_{ii}\right)^2+(1+2m)\sum_{i\neq j}\left(h^i_{jj}\right)^2+6m\sum_{i<j<k}\left(h^i_{jk}\right)^2\\ & -2(m-1)\sum_i\sum_{j<k}h^i_{jj}h^i_{kk}\\ =\; & \sum_i\left(h^i_{ii}\right)^2+6m\sum_{i<j<k}\left(h^i_{jk}\right)^2+(m-1)\sum_i\sum_{j<k}\left(h^i_{jj}-h^i_{kk}\right)^2\\ & +(1+2m-(n-2)(m-1))\sum_{j\neq i}\left(h^i_{jj}\right)^2-2(m-1)\sum_{j\neq i}h^i_{jj}h^i_{jj}\\ =\; & 6m\sum_{i<j<k}\left(h^i_{jk}\right)^2+(m-1)\sum_{i\neq j,k}\sum_{j<k}\left(h^i_{jj}-h^i_{kk}\right)^2\\ & +\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}\left[h^i_{ii}-(n-1)(m-1)h^i_{jj}\right]^2\geq 0\end{aligned}$$

care implică inegalitatea (3). Se vede că egalitatea din (3) are loc dacă şi numai dacă $h^i_{ii}=3h^i_{jj}$, $h^i_{jk}=0$, pentru i,j,k distincţi. În particular, dacă alegem $e_1,...,e_n$ astfel încât φe_1 să fie paralel cu vectorul curbură medie H, avem de asemenea că $h^j_{kk}=0$ pentru $j>1$, $k=1,...,n$ ∎

Teorema 2. *Fie $i\colon M^n\to S^{2n+1}$ o imersie izometrică C-total reală satisfăcând cazul de egalitate*

$$\|H\|^2=\frac{2(n+2)}{n^2(n-1)}\tau-\left(\frac{n+2}{n}\right). \tag{4}$$

În acest caz, M este subvarietate total geodezică, local izometrică cu spaţiul proiectiv real $\mathbf{R}P^n(1)$; sau mulţimea U de puncte non-total geodezice ale lui

M este o submulţime densă a lui M, U fiind o mulţime deschisă a lui P_a^n cu $a > 1$. Imersia i, dată de p_a, este modulo o izometrie a lui S^{2n+1}.

Demonstraţie. Se observă din teorema 1, că $\phi = nn - 2^2 \|H\|^2 = \lambda^2$ este o funcţie bine-definită pe M.

Dacă ϕ este identic nulă, atunci M este o subvarietate total geodezică a lui $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$. Deci, pentru simplitate, se poate presupune că M este non-total geodezică, adică $\phi \neq 0$. Astfel, $U = \{p \in M \mid \phi(p) \neq 0\}$ este o submulţime deschisă nevidă din M.

Cu $\omega^1, ..., \omega^n$ notăm 1-formele duale ale reperului $e_1, ..., e_n$ şi prin (ω_B^A), $A, B = 1, ..., n, 1*, ...n*, 2n+1$, notăm formele de conexiune pe M definită prin

$$\widetilde{\nabla} e_i = \sum_{j=1}^n \omega_i^j e_j + \sum_{j=1}^n \omega_i^{j*} e_{j*},$$
$$\widetilde{\nabla} e_{i*} = \sum_{j=1}^n \omega_{i*}^j e_j + \sum_{j=1}^n \omega_{i*}^{j*} e_{j*}, \qquad i = 1, ..., n,$$

unde $\omega_i^j = -\omega_j^i$, $\omega_{i*}^{j*} = -\omega_{j*}^{i*}$.

Pentru o subvarietate C-total reală M^n a unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$, avem

$$\omega_j^{i*} = \omega_i^{j*}, \quad \omega_i^j = \omega_{i*}^{j*}, \quad \omega_j^{i*} = \sum_{k=1}^n h_{jk}^i \omega^k.$$

Găsim

$$\omega_1^{1*} = 3\lambda\omega^1, \quad \omega_i^{1*} = \lambda\omega^i, \quad \omega_i^{i*} = \lambda\omega^1, \quad \omega_j^{i*} = 0, \quad 2 \leq i \neq j \leq n. \tag{5}$$

Prin aplicarea ecuaţiei lui Codazzi, obţinem

$$e_1\lambda = \lambda\omega_1^2(e_2) = \cdots = \lambda\omega_1^n(e_n), \quad e_2\lambda = \cdots = e_n\lambda = 0, \tag{6}$$
$$\omega_1^j(e_k) = 0, \quad 1 < j \neq k \leq n.$$

Din precedenta formulă, rezultă

$$\omega_1^j = e_1(\ln\lambda)\omega^j, \quad j = 2, ..., n. \tag{7}$$

Cu $\mathcal{D}$ notăm distribuţia generată prin φH şi cu $\mathcal{D}^\perp$ notăm distribuţia complementară ortogonală a lui $\mathcal{D}$ pe U. Atunci $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{D}^\perp$ sunt generate de $\{\varphi H\}$ şi respectiv $\{e_1, ..., e_n\}$.

Lema 3. *Pe U avem*

1. *curbele integrale ale lui* φH *(sau, echivalent ale lui* e_1*) sunt geodezice pe* M*,*
2. *distribuţiile* $\mathcal{D}$ *şi* $\mathcal{D}^{\perp}$ *sunt integrabile,*
3. *există un sistem local de coordonate* $\{x_1, ..., x_n\}$ *astfel încât:*
   a) $\mathcal{D}$ *este generată de* $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}\right\}$ *şi* $\mathcal{D}^{\perp}$ *este generată de* $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$,
   b) $e_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\omega^1 = dx$,
   c) *tensorul metric* g *are forma* $g = dx^2 + \sum_{j,k=2}^{n} g_{jk} dx_j dx_k$, *cu* $x = x_1$,
4. λ *este o funcţie de* x *care satisface:*

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + 2\lambda^3 + \lambda = 0. \tag{8}$$

Demonstraţia lemei. Relaţia (7) şi ecuaţiile de structură Cartan implică $d\omega^1 = 0$ şi $\nabla_{e_1} e_1 = 0$, adică, curbele integrale ale lui e_1 sunt geodezice. Aceasta demonstrează proprietatea 1.

Pentru orice $j, k > 1$, (5) implică $\langle [e_j, e_k], e_1\rangle = \omega_j^1(e_j) - \omega_j^1(e_k) = 0$ care arată că distribuţia $\mathcal{D}^{\perp}$ este integrabilă. Integrabilitatea din $\mathcal{D}$ este evidentă, deoarece $\mathcal{D}$ este o distribuţie 1-dimensională. Aceasta demonstrează 2.

Deoarece distribuţia $\mathcal{D}$ este 1-dimensională, există un sistem local de coordonate $\{y_1, ..., y_n\}$ astfel încât $e_1 = \dfrac{\partial}{\partial y_1}$. Întrucât $\mathcal{D}^{\perp}$ este integrabilă, există de asemenea un sistem local de coordonate $\{z_1, ..., z_n\}$ astfel încât $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z_2}, ..., \dfrac{\partial}{\partial z_n}\right\}$ generează $\mathcal{D}^{\perp}$. Punem

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = z_2, \quad ..., \quad x_n = z_n.$$

Atunci, $\{x_1, ..., x_n\}$ este un sistem local de coordonate, care satisface condiţiile date de 3.

Din (6) şi proprietatea 3, se vede că funcţia λ depinde numai de x $(= x_1)$; astfel $\lambda = \lambda(x)$. Cu λ' şi λ'' notăm derivata de ordinul întâi şi doi a lui λ în raport cu x. Calculând diferenţiala exterioară din (7) şi folosind (5), (7) şi ecuaţiile de structură Cartan, găsim

$$(\ln\lambda)'' + (\ln\lambda)'^2 = -1 - 2\lambda^2$$

care este echivalentă cu 4.

Astfel am demonstrat lema 3.

Revenim la demonstraţia teoremei 2. Referindu-ne la [4], soluţia ecuaţiei (8) este

$$\lambda = \frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}} cn \left(ax + b, \frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}} \right),$$

unde $a,\ b$ sunt constante, cu $a > 1$.

Teorema de rigiditate pentru imersii C-total reale din S^{2n+1} încheie demonstraţia teoremei 2 ∎

Bibliografie

[1] D.E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Math. **509**, Springer, Berlin, 1976.

[2] F. Bowman, *Introduction to elliptic functions with applications*, John Willey & Sons, Inc., New York, 1997.

[3] B.Y. Chen, *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds*, Arch. Math. **60** (1993), 568-578.

[4] B.Y. Chen, *Jacobi's elliptic functions and Lagrangian immersions*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **126** (1996), 687-704.

[5] D. Cioroboiu, *Scalar curvature of C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Differential Geometry-Dynamical Systems, Vol. **4**, No.**1** (2002), 5-11.

[6] D. Cioroboiu, *C-totally real submanifolds of* $\mathbf{R}^{2n+1}$ *satisfying a certain inequality*, Balkan J. Geom. Appl. **7**, No.**1** (2002), 55-62.

[7] F. Defever, I. Mihai, L. Verstraelen, *B.Y. Chen's inequality for C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Boll. Un. Mat. Ital. **11** (1997), 365-374.

[8] K. Yano, M. Kon, *CR-Submanifolds of Kaehlerian and Sasakian Manifolds*, Birkhäuser, Boston, 1983.

[9] K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific, Singapore, 1984.

Capitolul 7
Extreme cu legături pe forme spaţiale Sasaki

1 Extremele formelor pătratice de curbură ale unei forme spaţiale Sasaki

Reamintim o teorema arhicunoscută, dar necesară studiului nostru:

Teorema 1. *Valorile critice ale restricţiei formei pătratice* $f(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_i x_j$ *la sfera* $x_1^2 + ... + x_m^2 = 1$ *sunt valorile proprii ale matricei* $A = (a_{ij})$.

Demonstraţie. Un punct x de pe sfera unitate este punct critic pentru restricţia funcţiei f dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\nabla({}^t xAx) = \lambda \nabla({}^t xx),$$

adică $Ax = \lambda x$, ceea ce ne arată că punctele critice sunt de fapt vectorii proprii ortonormaţi ai matricei A. Dacă ştim versorul propriu x, atunci înmulţind cu ${}^t x$ găsim valoarea proprie ${}^t xAx = \lambda {}^t xx = \lambda$■

În consecinţă, numerele $\min\{{}^t xAx \mid {}^t xx = 1\}$, $\max\{{}^t xAx \mid {}^t xx = 1\}$ sunt respectiv cea mai mică şi cea mai mare dintre valorile proprii ale matricei A.

Tensorul de curbură $\widetilde{R}(X, Y, Z, W)$ al unei varietăţi Riemanniene $(\widetilde{M}^{2m+1}, g)$ induce un operator liniar simetric de curbură $\widetilde{R} : \Lambda^2(\widetilde{M}) \to \Lambda^2(\widetilde{M})$ şi o formă pătratică de curbură $Q : \Lambda^2(\widetilde{M}) \times \Lambda^2(\widetilde{M}) \to \mathbf{R}$,

$$Q(X \wedge Y) = \widetilde{R}(X \wedge Y, X \wedge Y) = 2\widetilde{R}(X, Y, X, Y)$$

Cum

$$(X \wedge Y)^{AB} = \frac{1}{2}(X^A Y^B - X^B Y^A),$$

avem

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{ABCD}(X \wedge Y)^{CD} &= \frac{1}{2}\widetilde{R}_{ABCD}X^C Y^D - \frac{1}{2}\widetilde{R}_{ABCD}X^D Y^C \\ &= \frac{1}{2}\widetilde{R}_{ABCD}X^C Y^D + \frac{1}{2}\widetilde{R}_{ABCD}X^C Y^D \\ &= \widetilde{R}_{ABCD}X^C Y^D.\end{aligned}$$

În cazul unei forme spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ tensorul de curbură are expresia

$$\begin{aligned}(1) \quad \widetilde{R}(X,Y,Z,W) = {} & \frac{c+3}{4}\{-g(Y,Z)g(X,W) + g(X,Z)g(Y,W)\} \\ & + \frac{c-1}{4}\{-\eta(X)\eta(Z)g(Y,W) + \eta(Y)\eta(Z)g(X,W) \\ & -g(X,Z)\eta(Y)g(\xi,W) + g(Y,Z)\eta(X)g(\xi,W) \\ & -g(\phi Y,Z)g(\phi X,W) + g(\phi X,Z)g(\phi Y,W) \\ & +2g(\phi X,Y)g(\phi Z,W)\}, \qquad \forall X,Y,Z,W \in \Gamma(T\widetilde{M}).\end{aligned}$$

Ne propunem să găsim:

a) valorile proprii şi vectorii proprii ale operatorului $\widetilde{R}$;

b) extremele formei pătratice de curbură Q.

Considerăm un reper de forma $\{X_a, X_{\overline{a}}, \xi\}$, unde $\{X_a, X_{\overline{a}}, X_{2m+1} = \xi\}$, $a = 1, ..., n$, sunt vectorii proprii ortonormaţi ai lui ϕ. Aceştia corespund la valorile proprii $\pm i$ (multiple de ordinul m) şi 0 (simplă):

$$\phi_{AB}X^B_\alpha = \rho X_{\alpha A},$$

unde $\rho^2 = -1$, $\alpha \in \{a, \overline{a}\}$, $\phi_{AB}\xi^B = 0$. Rezultă

$$\phi_{AB}X^A_\alpha X^B_\beta = \rho\delta_{\alpha\beta}, \qquad \eta_A X^A_\alpha = 0.$$

Să arătăm că vectorii proprii ai operatorului de curbură sunt de tipul $X_A \wedge X_B$, unde A şi B iau respectiv valorile $a, \overline{a}, 2m+1$.

Metrica riemanniană g_{AB} pe $\widetilde{M}(c)$ induce metrica riemanniană

$$G_{ABCD} = \frac{1}{2}(g_{AC}g_{BD} - g_{AD}g_{BC})$$

pe $\Lambda^2(\widetilde{M})$. Dacă $\{X_a, X_{\overline{a}}, X_{2m+1} = \xi\}$ sunt ortonormaţi în raport cu g, atunci $X_A \wedge X_B$ sunt ortonormaţi în raport cu G_{ABCD}.

Vom găsi valorile proprii ale operatorului simetric $\widetilde{R}$ întrucât combinaţiile de forma $X_A \wedge X_B$, unde A şi B, iau valori din mulţimea $\{a, \overline{a}, 2m+1\}$, se dovedesc a fi vectori proprii.

Componentele locale ale tensorului de curbură $\widetilde{R}$ sunt

$$\begin{aligned}(2)\qquad \widetilde{R}_{ABCD} \;=\;& \frac{c+3}{4}\{-g_{BC}g_{AD}+g_{AC}g_{BD}\}+\frac{c-1}{4}\{-\eta_A\eta_C g_{BD}+\eta_B\eta_C g_{AD}\\ &-g_{AC}\eta_B\eta_D+g_{BC}\eta_A\eta_D-\phi_{CB}\phi_{DA}+\phi_{CA}\phi_{DB}+2\phi_{BA}\phi_{DC}\},\end{aligned}$$

unde $\phi_{AB}=g_{TA}\phi^T_B$.

1. Pentru $X_a\wedge X_b$, din (2) deducem:

$$\begin{aligned}(3)\qquad \widetilde{R}_{ABCD}(X_a\wedge X_b)^{CD} \;=\;& \frac{c+3}{4}\{-g_{BC}g_{AD}\frac{1}{2}(X^C_aX^D_b-X^C_bX^D_a)\\ &+g_{AC}g_{BD}\frac{1}{2}(X^C_aX^D_b-X^C_bX^D_a)\}\\ &+\frac{c-1}{4}\{-\eta_A\eta_C g_{BD}\frac{1}{2}(X^C_aX^D_b-X^C_bX^D_a)\\ &+\eta_B\eta_C g_{AD}\frac{1}{2}(X^C_aX^D_b-X^C_bX^D_a)\\ &-g_{AC}\eta_B\eta_D\frac{1}{2}(X^C_aX^D_b-X^C_bX^D_a)\\ &+g_{BC}\eta_A\eta_D\frac{1}{2}(X^C_aX^D_b-X^C_bX^D_a)\\ &-\phi_{CB}\phi_{DA}\frac{1}{2}(X^C_aX^D_b-X^C_bX^D_a)\\ &+\phi_{CA}\phi_{DB}\frac{1}{2}(X^C_aX^D_b-X^C_bX^D_a)\\ &+2\phi_{BA}\phi_{DC}\frac{1}{2}(X^C_aX^D_b-X^C_bX^D_a)\}.\end{aligned}$$

După efectuarea calculelor, găsim

$$\begin{aligned}(4)\;\; \widetilde{R}_{ABCD}(X_a\wedge X_b)^{CD} \;=\;& \frac{c+3}{2}\{-X_{aB}X_{bA}+X_{bB}X_{aA}+X_{aA}X_{bB}-X_{bA}X_{aB}\}\\ &+\frac{c-1}{2}\{-\rho^2X_{aB}X_{bA}+\rho^2X_{bB}X_{aA}+\rho^2X_{aA}X_{bB}\\ &-\rho^2X_{bA}X_{aB}\},\end{aligned}$$

de unde

$$\widetilde{R}_{ABCD}(X_a\wedge X_b)^{CD}=(X_{aA}X_{bB}-X_{bA}X_{aB})=G_{ABCD}(X_a\wedge X_b)^{CD}.$$

2. Combinaţia $X_a\wedge\xi$ şi (2) produce:

$$(5)\qquad \widetilde{R}_{ABCD}(X_a\wedge\xi)^{CD} \;=\; \frac{c+3}{4}\left\{-g_{BC}g_{AD}\frac{1}{2}\left(X^C_a\xi^D-X^D_a\xi^C\right)\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+g_{AC}g_{BD}\frac{1}{2}\left(X_a^C\xi^D - X_a^D\xi^C\right)\Big\}\\
&+\frac{c-1}{4}\Big\{-\eta_A\eta_C g_{BD}\frac{1}{2}\left(X_a^C\xi^D - X_a^D\xi^C\right)\\
&+\eta_B\eta_C g_{AD}\frac{1}{2}\left(X_a^C\xi^D - X_a^D\xi^C\right)\\
&-g_{AC}\eta_B\eta_D\frac{1}{2}\left(X_a^C\xi^D - X_a^D\xi^C\right)\\
&+g_{BC}\eta_A\eta_D\frac{1}{2}\left(X_a^C\xi^D - X_a^D\xi^C\right)\\
&-\phi_{CB}\phi_{DA}\frac{1}{2}\left(X_a^C\xi^D - X_a^D\xi^C\right)\\
&+\phi_{CA}\phi_{DB}\frac{1}{2}\left(X_a^C\xi^D - X_a^D\xi^C\right)\\
&+2\phi_{BA}\phi_{DC}\frac{1}{2}\left(X_a^C\xi^D - X_a^D\xi^C\right)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Calculele conduc la

$$\widetilde{R}_{ABCD}(X_a\wedge\xi)^{CD} = -\eta_B X_{aA} + \eta_A X_{aB} = G_{ABCD}(X_a\wedge\xi)^{CD}.$$

3. Similar, pentru $X_{\overline{a}}\wedge\xi$, din 2 găsim:

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad \widetilde{R}_{ABCD}\left(X_{\overline{a}}\wedge\xi\right)^{CD} = \; &\frac{c+3}{4}\Big\{-g_{BC}g_{AD}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C\xi^D - X_{\overline{a}}^D\xi^C\right)\\
&+g_{AC}g_{BD}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C\xi^D - X_{\overline{a}}^D\xi^C\right)\Big\}\\
&+\frac{c-1}{4}\Big\{-\eta_A\eta_C g_{BD}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C\xi^D - X_{\overline{a}}^D\xi^C\right)\\
&+\eta_B\eta_C g_{AD}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C\xi^D - X_{\overline{a}}^D\xi^C\right)\\
&-g_{AC}\eta_B\eta_D\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C\xi^D - X_{\overline{a}}^D\xi^C\right)\\
&+g_{BC}\eta_A\eta_D\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C\xi^D - X_{\overline{a}}^D\xi^C\right)\\
&-\phi_{CB}\phi_{DA}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C\xi^D - X_{\overline{a}}^D\xi^C\right)\\
&+\phi_{CA}\phi_{DB}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C\xi^D - X_{\overline{a}}^D\xi^C\right)\\
&+2\phi_{BA}\phi_{DC}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C\xi^D - X_{\overline{a}}^D\xi^C\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

şi în final

$$\widetilde{R}_{ABCD}(X_{\overline{a}} \wedge \xi)^{CD} = \frac{1}{2}(c+1)(-\eta_B X_{\overline{a}A} + \eta_A X_{\overline{a}B}) = \frac{1}{2}(c+1)G_{ABCD}(X_{\overline{a}} \wedge \xi)^{CD}.$$

4. Combinaţia $X_{\overline{a}} \wedge X_b$, folosită în (2), conduce la

$$(7) \qquad \begin{aligned} \widetilde{R}_{ABCD}\left(X_{\overline{a}} \wedge X_b\right)^{CD} = {} & \frac{c+3}{4}\Big\{-g_{BC}g_{AD}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_b^D - X_b^C X_{\overline{a}}^D\right) \\ & +g_{AC}g_{BD}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_b^D - X_b^C X_{\overline{a}}^D\right)\Big\} \\ & +\frac{c-1}{4}\Big\{-\eta_A\eta_C g_{BD}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_b^D - X_b^C X_{\overline{a}}^D\right) \\ & +\eta_B\eta_C g_{AD}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_b^D - X_b^C X_{\overline{a}}^D\right) \\ & -g_{AC}\eta_B\eta_D\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_b^D - X_b^C X_{\overline{a}}^D\right) \\ & +g_{BC}\eta_A\eta_D\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_b^D - X_b^C X_{\overline{a}}^D\right) \\ & -\phi_{CB}\phi_{DA}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_b^D - X_b^C X_{\overline{a}}^D\right) \\ & +\phi_{CA}\phi_{DB}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_b^D - X_b^C X_{\overline{a}}^D\right) \\ & +2\phi_{BA}\phi_{DC}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_b^D - X_b^C X_{\overline{a}}^D\right)\Big\}. \end{aligned}$$

Deducem

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_{ABCD}(X_{\overline{a}} \wedge X_b)^{CD} &= \frac{1}{2}(c+1)(X_{\overline{a}A}X_{bB} - X_{\overline{a}B}X_{bA}) \\ &= \frac{1}{2}(c+1)G_{ABCD}(X_{\overline{a}} \wedge X_b)^{CD}. \end{aligned}$$

5. Similar, pentru $X_{\overline{a}} \wedge X_{\overline{b}}$ avem

$$(8) \qquad \begin{aligned} \widetilde{R}_{ABCD}(X_{\overline{a}} \wedge X_{\overline{b}})^{CD} = {} & \frac{c+3}{4}\Big\{-g_{BC}g_{AD}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_{\overline{b}}^D - X_{\overline{b}}^C X_{\overline{a}}^D\right) \\ & +g_{AC}g_{BD}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_{\overline{b}}^D - X_{\overline{b}}^C X_{\overline{a}}^D\right)\Big\} \\ & +\frac{c-1}{4}\Big\{-\eta_A\eta_C g_{BD}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_{\overline{b}}^D - X_{\overline{b}}^C X_{\overline{a}}^D\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\eta_B\eta_C g_{AD}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_{\overline{b}}^D - X_{\overline{b}}^C X_{\overline{a}}^D\right)\\
&-g_{AC}\eta_B\eta_D\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_{\overline{b}}^D - X_{\overline{b}}^C X_{\overline{a}}^D\right)\\
&+g_{BC}\eta_A\eta_D\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_{\overline{b}}^D - X_{\overline{b}}^C X_{\overline{a}}^D\right)\\
&-\phi_{CB}\phi_{DA}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_{\overline{b}}^D - X_{\overline{b}}^C X_{\overline{a}}^D\right)\\
&+\phi_{CA}\phi_{DB}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_{\overline{b}}^D - X_{\overline{b}}^C X_{\overline{a}}^D\right)\\
&+2\phi_{BA}\phi_{DC}\frac{1}{2}\left(X_{\overline{a}}^C X_{\overline{b}}^D - X_{\overline{b}}^C X_{\overline{a}}^D\right)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Găsim

$$\widetilde{R}_{ABCD}(X_{\overline{a}\wedge X_{\overline{b}}})^{CD} = (X_{\overline{a}A}X_{\overline{b}B} - X_{\overline{a}B}X_{\overline{b}A}) = G_{ABCD}(X_{\overline{a}} \wedge X_{\overline{b}})^{CD}.$$

În aceste condiţii, valorile proprii ale operatorului $\widetilde{R}$ sunt $\lambda = 1$ pentru vectorii proprii $X_a \wedge X_b$, $X_a \wedge \xi$, $X_{\overline{a}} \wedge X_{\overline{b}}$ (valoare proprie multiplă de ordinul m^2) şi $\lambda = \dfrac{c+1}{2}$ pentru $X_{\overline{a}} \wedge X_b$, $X_{\overline{a}} \wedge \xi$ (valoare proprie multiplă de ordinul $\dfrac{m^2+m}{2}$).

Deoarece vectorii proprii $X_A \wedge X_B$ sunt ortonormaţi, deducem

$$\lambda_{\min} \leq \widetilde{R}(X_A \wedge X_B, X_A \wedge X_B) \leq \lambda_{\max}$$

sau, echivalent,

$$\frac{\lambda_{\min}}{2} \leq \widetilde{R}(X_A, X_B, X_A, X_B) \leq \frac{\lambda_{\max}}{2}.$$

Discutând după valorile lui c, găsim:

a) pentru $c < 1$, avem

$$\lambda_{\min} = \frac{c+1}{2}, \quad \lambda_{\max} = 1;$$

b) pentru $c \geq 1$, avem

$$\lambda_{\min} = 1, \quad \lambda_{\max} = \frac{c+1}{2}.$$

Sumând, obţinem marginile curburii scalare

$$\text{a)} \quad \frac{c+1}{4}(m^2+m)(2m+1)^2 \leq \sum_{A,B=1}^{2m+1} \widetilde{R}(X_A, X_B, X_A, X_B) \leq m^2(2m+1)^2$$

şi respectiv

$$\text{b)}\quad m^2\,(2m+1)^2 \leq \sum_{A,B=1}^{2m+1} \widetilde{R}(X_A,X_B,X_A,X_B) \leq \frac{c+1}{4}(m^2+m)\,(2m+1)^2\,.$$

În consecinţă, am demonstrat

Teorema 2. 1) *Operatorul de curbură al unei forme spaţiale Sasaki* $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$ *are valorile proprii reale* $\lambda = 1$ *pentru vectorii proprii* $X_a \wedge X_b$, $X_a \wedge \xi$, $X_{\overline{a}} \wedge X_{\overline{b}}$ *(valoare proprie multiplă de ordinul* m^2*) şi* $\lambda = \dfrac{c+1}{2}$ *pentru* $X_{\overline{a}} \wedge X_b$, $X_{\overline{a}} \wedge \xi$ *(valoare proprie multiplă de ordinul* $\dfrac{m^2+m}{2}$*).*

2) *Extremele formelor pătratice de curbură* $\widetilde{R}(X_A,X_B,X_A,X_B)$ *sunt:* $\lambda_{\min} = \dfrac{c+1}{2}$, $\lambda_{\max} = 1$ *pentru* $c<1$ *şi* $\lambda_{\min} = 1$, $\lambda_{\max} = \dfrac{c+1}{2}$ *pentru* $c \geq 1$.

3) *Marginile curburii scalare sunt* $m^2\,(2m+1)^2$ *şi* $\dfrac{c+1}{4}(m^2+m)\,(2m+1)^2$.

2 Extremele formelor pătratice de curbură ale unei subvarietăţi oblice n-dimensionale într-o formă spaţială Sasaki $(2m+1)$-dimensională

Fie $\widetilde{M}(c)$ o formă spaţială Sasaki de dimensiune $2m+1$ şi M o subvarietate oblică de dimensiune n. Dacă X,Y,Z,W sunt câmpuri vectoriale tangente la M, atunci tensorul de curbură al formei spaţiale Sasaki $\widetilde{M}(c)$ are restricţia

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y,Z,W) \;=\; & \frac{c+3}{4}\{-g(Y,Z)g(X,W)+g(X,Z)g(Y,W)\} \\
& +\frac{c-1}{4}\{-\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)+\eta(Y)\eta(Z)g(X,W) \\
& -g(X,Z)\eta(Y)g(\xi,W)+g(Y,Z)\eta(X)g(\xi,W) \\
& -g(\phi Y,Z)g(\phi X,W)+g(\phi X,Z)g(\phi Y,W) \\
& +2g(\phi X,Y)g(\phi Z,W)\}, \quad \forall X,Y,Z,W \in \Gamma(TM).
\end{aligned}$$

Folosim ecuaţia lui Gauss

$$R(X,Y,Z,W) = \widetilde{R}(X,Y,Z,W) - g(h(X,W),h(Y,Z)) + g(h(X,Z),h(Y,W)).$$

Formele fundamentale vectoriale de al doilea tip

$$h(X,W)=\sum_{T=n+1}^{2m+1} h^T(X,W)\xi_T \quad \text{şi} \quad h(Y,Z)=\sum_{S=n+1}^{2m+1} h^S(Y,Z)\xi_S$$

conduc la

$$g(h(X,W),h(Y,Z))=g\left(\sum_{T=n+1}^{2m+1}\sum_{S=n+1}^{2m+1} h^T(X,W)h^S(Y,Z)\xi_T\xi_S\right).$$

Deoarece $g(\xi_T,\xi_S)=\delta_{TS}$, rezultă

$$g(h(X,W),h(Y,Z))=\sum_{T=n+1}^{2m+1} h^T(X,W)h^T(Y,Z).$$

În aceste condiţii,

$$\begin{aligned}(9)\quad R(X,Y,Z,W) &= \widetilde{R}(X,Y,Z,W)\\ &+\sum_{T=n+1}^{2m+1}[h^T(X,Z)h^T(Y,W)-h^T(X,W)h^T(Y,Z)].\end{aligned}$$

Fie $\{e_1,...,e_n\}$ un reper ortonormat în T_pM şi $\{e_{n+1},...,e_{2m},e_{2m+1}\}$ un reper ortonormat în $T_p^{\perp}M$. Construim 2-planele

$$\Pi_{ij}^{pq}=\frac{1}{2}(e_i^p e_j^q-e_i^q e_j^p).$$

Mulţimea $\{\Pi_{ij}^{pq}\}$ este ortonormată întrucât

$$G_{pqrs}\Pi_{ij}^{pq}\Pi_{ij}^{rs}=\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}),\quad p,q,r,s=1,2,...,n,\quad i,j,k,l=1,2,...,n.$$

Considerăm formele pătratice de curbură

$$\rho_{ij}=R_{pqrs}\Pi_{ij}^{pq}\Pi_{ij}^{rs},$$

unde $i<j$ (pentru i,j fixate, curbura scalară determinată de planul ortonormat Π_{ij}^{pq}), şi căutăm extremele lor cu restricţia

$$G_{pqrs}\Pi_{ij}^{pq}\Pi_{ij}^{rs}=\frac{\delta_{ii}\delta_{jj}}{2},$$

care este o consecinţă a condiţiei de ortonormare.

Aplicând teorema 1, există λ_{ij} astfel încât

$$\nabla\rho_{ij} = \lambda_{ij}\nabla(G_{pqrs}\Pi^{pq}_{ij}\Pi^{rs}_{ij}).$$

Gradientul $\nabla(G_{pqrs}\Pi^{pq}_{ij}\Pi^{rs}_{ij})$ are componentele (derivate parţiale)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho_{ij}}{\partial\Pi^{uv}_{kl}} &= R_{pqrs}\Pi^{rs}_{ij}(\delta^p_u\delta^q_v - \delta^q_u\delta^p_v)(\delta^k_i\delta^l_j - \delta^l_i\delta^k_j)\\ &= 2R_{uvrs}\Pi^{rs}_{ij}(\delta^k_i\delta^l_j - \delta^l_i\delta^k_j).\end{aligned}$$

Să arătăm că reperul $\{e_1, ..., e_n = \xi\}$ a lui T_pM şi $\{e_{n+1}, ..., e_{2m}, e_{2m+1}\}$ a lui $T^{\perp}_pM$, folosit în teorema 1, din capitolul 3, produce 2-planele ce sunt soluţii ale sistemului ce dă punctele critice ale funcţiilor Lagrange

$$L_{ij} = \rho_{ij} - \lambda_{ij}\left(G_{pqrs}\Pi^{pq}_{ij}\Pi^{rs}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ii}\delta_{jj}\right),$$

adică λ_{ij} sunt valorile proprii ale operatorului de curbură.

Contribuţia lui $\widetilde{R}$ la curbura scalară determinată de planele ortonormate Π^{pq}_{ij}, se reduce la formele pătratice

$$\widetilde{\rho}_{ij} = \widetilde{R}_{pqrs}\Pi^{pq}_{ij}\Pi^{rs}_{ij}.$$

Prin derivare, găsim

$$\frac{\partial\widetilde{\rho}_{ij}}{\partial\Pi^{uv}_{kl}} = 2\widetilde{R}_{uvrs}\Pi^{rs}_{ij}(\delta^k_i\delta^l_j - \delta^l_i\delta^k_j).$$

Expresia lui $\widetilde{R}_{uvrs}\Pi^{rs}_{ij}$, este

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{uvrs}\Pi^{rs}_{ij} &= \Big\{\frac{c+3}{4}[-g_{vi}g_{uj} + g_{ui}g_{vj}] + \frac{c-1}{4}[-\eta_u\eta_i g_{vj} + \eta_v\eta_i g_{uj}\\ &\quad -g_{ui}\eta_v\eta_j + g_{vi}\eta_u\eta_j - \phi_{iv}\phi_{ju} + \phi_{iu}\phi_{jv} + 2\phi_{vu}\phi_{ji}]\Big\}\\ &=\Big\{\frac{c+3}{4}[-g_{vi}g_{uj} + g_{ui}g_{vj}] + \frac{c-1}{4}[-\eta_u\eta_i g_{vj} + \eta_v\eta_j g_{uj}\\ &\quad -g_{ui}\eta_v\eta_i + g_{vi}\eta_u\eta_j - \phi_{iv}\phi_{ju} + \phi_{iu}\phi_{jv} + 2\phi_{vu}\phi_{ji}]\Big\}.\end{aligned}$$

Pe reperul ales, $\widetilde{R}_{uvrs}\Pi^{rs}_{ij}$ este

$$\begin{array}{lll}\dfrac{c+3}{4} + \dfrac{c-1}{4}\cos^2\theta, & \text{pentru} & i=1,\ j=2,\ u=1,\ v=2;\\ -\dfrac{c+3}{4} + \dfrac{c-1}{4}3\cos^2\theta, & \text{pentru} & i=1,\ j=2,\ u=2,\ v=1;\end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{c-1}{2}\cos^2\theta, & \text{pentru} & i=1,\ j=2,\ u=3,\ v=4;\\
\dfrac{c-1}{2}\cos^2\theta, & \text{pentru} & i=1,\ j=2,\ u=4,\ v=3;\\
\quad\dots & & \\
\dfrac{c-1}{2}\cos^2\theta, & \text{pentru} & i=1,\ j=2,\ u=n,\ v=n-1;\\
\dfrac{c-1}{2}\cos^2\theta, & \text{pentru} & i=1,\ j=2,\ u=n-1,\ v=n;\\
0, & \text{pentru} & i=1,\ j=x,u,v;\\
\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}, & \text{pentru} & i=1,\ j=n,\ u=1,\ v=n;\\
-\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}, & \text{pentru} & i=1,\ j=n,\ u=n,\ v=1;\\
\dfrac{c-1}{4}, & \text{pentru} & i=1,\ j=n,\ u=n,\ v=n;\\
\quad\dots & & \\
\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}\cos^2\theta, & \text{pentru} & i=3,\ j=4,\ u=3,\ v=4;\\
-\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}3\cos^2\theta, & \text{pentru} & i=3,\ j=4,\ u=4,\ v=3;\\
\dfrac{c+3}{4}, & \text{pentru} & i=3,\ j=x,\ u=3,\ v=x;\\
-\dfrac{c+3}{4}, & \text{pentru} & i=3,\ j=x,\ u=x,\ v=3;\\
\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}, & \text{pentru} & i=3,\ j=n,\ u=3,\ v=n;\\
-\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}, & \text{pentru} & i=3,\ j=n,\ u=n,\ v=3;\\
\dfrac{c-1}{4}, & \text{pentru} & i=3,\ j=n,\ u=n,\ v=n;\\
\quad\dots & & \\
\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}\cos^2\theta, & \text{pentru} & i=n-1,\ j=n,\ u=n-1,\ v=n;\\
-\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}3\cos^2\theta, & \text{pentru} & i=n-1,\ j=n,\ u=n,\ v=n-1,
\end{array}
$$

cu $x=\overline{3,n-1}$.

Rămâne să analizăm contribuţia formelor pătratice

$$D_{ij} = \sum_{T=n+1}^{2m+1} (h^T_{ps} h^T_{qr} - h^T_{pq} h^T_{rs}) \Pi^{pq}_{ij} \Pi^{rs}_{ij}.$$

Pentru aceasta avem

$$C^{kl}_{uvij} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial \Pi^{uv}_{kl}} = 2 \sum_{T=n+1}^{2m+1} (h^T_{us} h^T_{vr} - h^T_{uv} h^T_{rs}) \Pi^{rs}_{ij} (\delta^k_i \delta^l_j - \delta^l_i \delta^k_j).$$

Pe de altă parte,

$$2 \sum_{T=n+1}^{2m+1} (h^T_{us} h^T_{vr} - h^T_{uv} h^T_{rs}) \Pi^{rs}_{ij} = \sum_{T=n+1}^{2m+1} (h^T_{us} h^T_{vr} - h^T_{uv} h^T_{rs}) e^r_i e^s_j.$$

În consecinţă,

$$C^{kl}_{uvij} = \sum_{T=n+1}^{2m+1} (h^T_{us} h^T_{vr} - h^T_{uv} h^T_{rs}) (\delta^k_i \delta^l_j - \delta^l_i \delta^k_j) e^r_i e^s_j.$$

Pentru problematica noastră, vom considera coeficientul lui C^{kl}_{uvij}, adică

$$C_{uvij} = \sum_{T=n+1}^{2m+1} (h^T_{us} h^T_{vr} - h^T_{uv} h^T_{rs}) e^r_i e^s_j = \sum_{T=n+1}^{2m+1} (h^T_{uj} h^T_{vi} - h^T_{uv} h^T_{ij}).$$

Altfel scris,

$$C_{uvij} = (h^{n+1}_{uj} h^{n+1}_{vi} - h^{n+1}_{uv} h^{n+1}_{ij}) + \sum_{T=n+2}^{2m+1} (h^T_{uj} h^T_{vi} - h^T_{uv} h^T_{ij}).$$

Folosindu-ne de reperul din demonstraţia teoremei 1 din capitolul 3 şi cu $x = \overline{3, n-1}$, găsim $(h^{n+1}_{uj} h^{n+1}_{vi} - h^{n+1}_{uv} h^{n+1}_{ij})$ egal cu

$$\begin{array}{rll}
0, & \text{pentru} & i=1,\ j=2,\ u=1,\ v=2; \\
-h^{n+1}_{11} h^{n+1}_{22}, & \text{pentru} & i=1,\ j=2,\ u=2,\ v=1; \\
0, & \text{pentru} & i=1,\ j=2,\ u=3,\ v=4; \\
0, & \text{pentru} & i=1,\ j=2,\ u=4,\ v=3; \\
\dots & & \\
0, & \text{pentru} & i=1,\ j=2,\ u=n, v=n-1; \\
0, & \text{pentru} & i=1,\ j=2,\ u=n-1, v=n; \\
0, & \text{pentru} & i=1,\ j=x,\ u, v; \\
0, & \text{pentru} & i=1,\ j=n,\ u=1, v=n; \\
h^{n+1}_{nn} h^{n+1}_{11}, & \text{pentru} & i=1,\ j=n,\ u=n,\ v=1;
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
-h_{nn}^{n+1}h_{11}^{n+1}, & \text{pentru} & i=1,\ j=n,\ u=n,\ v=n;\\
\ldots & & \\
0, & \text{pentru} & i=3,\ j=4,\ u=3,\ v=4;\\
h_{44}^{n+1}h_{33}^{n+1}, & \text{pentru} & i=3,\ j=4,\ u=4,\ v=3;\\
0, & \text{pentru} & i=3,\ j=x,\ u=3,\ v=x;\\
h_{xx}^{n+1}h_{33}^{n+1}, & \text{pentru} & i=3,\ j=x,\ u=x,\ v=3;\\
0, & \text{pentru} & i=3, j=n, u=3, v=n;\\
h_{nn}^{n+1}h_{33}^{n+1}, & \text{pentru} & i=3,\ j=n,\ u=n,\ v=3;\\
-h_{nn}^{n+1}h_{33}^{n+1}, & \text{pentru} & i=3,\ j=n,\ u=n,\ v=n;\\
\ldots & & \\
0, & \text{pentru} & i=n-1,\ j=n,\ u=n-1,\ v=n;\\
h_{nn}^{n+1}h_{n-1n-1}^{n+1}, & \text{pentru} & i=n-1,\ j=n,\ u=n,\ v=n-1.
\end{array}$$

Pe de altă parte, tot din demonstraţia teoremei 1 din capitolul 3, avem $a=h_{11}^{n+1}, b=h_{22}^{n+1}$ şi $\mu=h_{33}^{n+1}=\ldots=h_{nn}^{n+1}$, unde $r=n+1,\ldots,2m+1$. În consecinţă, componentele precedente sunt combinaţii de produse formate din a, b şi μ.

Observaţie. Vom calcula valorile proprii ale submatricei $\begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r \\ h_{12}^r & -h_{11}^r \end{pmatrix}$, unde $r=n+2,\ldots,2m+1$. Avem

$$\begin{vmatrix} h_{11}^r-\lambda^r & h_{12}^r \\ h_{12}^r & -h_{11}^r-\lambda^r \end{vmatrix}=0,$$

adică $(\lambda^r)^2=(h_{11}^r)^2+(h_{12}^r)^2$, cu soluţiile $\lambda_{1,2}^r=\pm\sqrt{(h_{11}^r)^2+(h_{12}^r)^2}$. Evident

$$\lambda_1^r\cdot\lambda_2^r=-[(h_{11}^r)^2+(h_{12}^r)^2].$$

Întorcându-ne la demonstraţia noastră, vom calcula similar termenii

$$F_{uvij}=\sum_{T=n+2}^{2m+1}(h_{uj}^T h_{vi}^T-h_{uv}^T h_{ij}^T).$$

Dacă $h_{11}^T=-h_{12}^T$, obţinem

$$F_{uvij}=\begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad i=1,\ j=2,\ u=1,\ v=2,\\ -\displaystyle\sum_{T=n+2}^{2m+1}[(h_{11}^T)^2+(h_{12}^T)^2], & \text{pentru} \quad i=1,\ j=2,\ u=2,\ v=1,\\ 0, & \text{pentru toate combinaţiile } i<j, u, v. \end{cases}$$

Rezultă că Π_{kl}^{uv}, $k < l$ sunt vectori proprii cu valorile proprii, λ_{ij} obţinute prin însumarea datelor corespondente din tabelele anterioare date prin acolade. Valorile proprii λ_{ij} se pot calcula ţinând cont de Teorema 1. Într-adevăr, cunoaşterea vectorului propriu Π_{kl}^{uv}, $k < l$, impune

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial \Pi_{kl}^{uv}}\Pi_{kl}^{uv} + \frac{\partial \widetilde{\rho}_{ij}}{\partial \Pi_{kl}^{uv}}\Pi_{kl}^{uv} - \lambda_{ij}\frac{\partial E_{ij}}{\partial \Pi_{kl}^{uv}}\Pi_{kl}^{uv} = 0,$$

(cu sumare după u, v şi $k < l$), unde

$$E_{ij} = G_{pqrs}\Pi_{ij}^{pq}\Pi_{ij}^{rs} - \frac{1}{2}\delta_{ii}\delta_{jj}.$$

Concluzionăm că λ_{ij} este

$$\begin{array}{rl}
\dfrac{c+3}{4} + \dfrac{c-1}{4}\cos^2\theta, & \text{pentru } i=1,\ j=2,\ u=1,\ v=2 \\
\omega, & \text{pentru } i=1,\ j=2,\ u=2,\ v=1 \\
\dfrac{c-1}{2}\cos^2\theta, & \text{pentru } i=1,\ j=2,\ u=3,\ v=4 \\
\dfrac{c-1}{2}\cos^2\theta, & \text{pentru } i=1,\ j=2,\ u=4,\ v=3 \\
\dots & \\
\dfrac{c-1}{2}\cos^2\theta, & \text{pentru } i=1,\ j=2,\ u=n,\ v=n-1 \\
\dfrac{c-1}{2}\cos^2\theta, & \text{pentru } i=1,\ j=2,\ u=n-1,\ v=n \\
0, & \text{pentru } i=1,\ j=x,u,v \\
\dfrac{c+3}{4} + \dfrac{c-1}{4}, & \text{pentru } i=1,\ j=n,\ u=1,\ v=n \\
-a\mu - \dfrac{c+3}{4} + \dfrac{c-1}{4}, & \text{pentru } i=1,\ j=n,\ u=n,\ v=1 \\
-a\mu + \dfrac{c-1}{4}, & \text{pentru } i=1,\ j=n,\ u=n,\ v=n \\
\dots & \\
\dfrac{c+3}{4} + \dfrac{c-1}{4}\cos^2\theta, & \text{pentru } i=3, j=4, u=3, v=4 \\
\mu^2 - \dfrac{c+3}{4} + \dfrac{c-1}{4}3\cos^2\theta, & \text{pentru } i=3, j=4, u=4, v=3
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
\dfrac{c+3}{4}, & \text{pentru } i=3,\ j=x,\ u=3,\ v=x \\
-\mu^2-\dfrac{c+3}{4}, & \text{pentru } i=3,\ j=x,\ u=x,\ v=3 \\
\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}, & \text{pentru } i=3,\ j=n,\ u=3,\ v=n \\
\mu^2-\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}, & \text{pentru } i=3,\ j=n,\ u=n,\ v=3 \\
-\mu^2+\dfrac{c-1}{4}, & \text{pentru } i=3,\ j=n,\ u=n,\ v=n \\
\dots & \\
\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}\cos^2\theta, & \text{pentru } i=n-1,\ j=n,\ u=n-1,\ v=n \\
\mu^2-\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}3\cos^2\theta, & \text{pentru } i=n-1,\ j=n,\ u=n,\ v=n-1,
\end{array}
$$

unde

$$\omega=-ab+\sum_{T=n+2}^{2m+1}[(h_{11}^T)^2+(h_{12}^T)^2]-\frac{c+3}{4}+\frac{c-1}{4}3\cos^2\theta$$

şi $x=\overline{3,n}$.

Astfel,

- $\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}\cos^2\theta$ este valoare proprie multiplă de ordinul $\dfrac{n}{2}$,
- ω este valoare proprie simplă,
- $\dfrac{c-1}{2}\cos^2\theta$ este valoare proprie multiplă de ordinul $n-2$,
- $-\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}$ este valoare proprie,
- $-a\mu-\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}$ este valoare proprie multiplă de ordinul n,
- $-b\mu-\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}$ este valoare proprie multiplă de ordinul n,
- $-\mu^2-\dfrac{c+3}{4}+\dfrac{c-1}{4}$ este valoare proprie,
- $-a\mu+\dfrac{c-1}{4}$ este valoare proprie,

- $-b\mu + \dfrac{c-1}{4}$ este valoare proprie,
- $\mu^2 - \dfrac{c+3}{4} + \dfrac{c-1}{4} 3\cos^2\theta$ este valoare proprie multiplă de ordinul $\dfrac{n-2}{2}$,
- $\dfrac{c+3}{4}$ este valoare proprie multiplă de ordinul $1+(n-3)(n-1)$,
- $\mu^2 - \dfrac{c+3}{4}$ este valoare proprie multiplă de ordinul $1+(n-3)(n-1)$,
- $-\mu^2 + \dfrac{c-1}{4}$ este valoare proprie multiplă de ordinul $n-2$,

toate aceste valori proprii corespunzând vectorilor proprii ataşaţi.

Ca observaţie, este de remarcat că suma acestor valori proprii reprezintă curbura scalară.

De fapt, am demonstrat

Teorema 3. *Extremele formelor pătratice de curbură* $R_{ABCD}\Pi_{ij}^{AB}\Pi_{ij}^{CD}$ *ale unei subvarietăţi oblice n-dimensionale într-o formă spaţială Sasaki* $(2m+1)$-*dimensională, condiţionate de repere ortonormate, sunt respectiv cea mai mică şi cea mai mare dintre valorile proprii ale operatorului liniar de curbură asociat. Precizarea acestor valori extreme depinde de relaţia de ordine dintre* a, b *şi* $a+b=\mu$.

3 Extremele curburii scalare τ cu legătura $\|h\|^2 + \|H\|^2 \leq 1$

În paragrafele anterioare am găsit expresia curburii scalare ca fiind,

$$2\tau = n^2\|H\|^2 - \|h\|^2 + \frac{c+3}{4}n(n-1) + \frac{c-1}{4}[3(n-1)\cos^2\theta - 2n + 2],$$

în cazul $M \subset \widetilde{M}(c)$, care este θ-subvarietate oblică cu $\dim M = n$.

Notăm $\|H\| = x$, $\|h\| = y$ şi $b = \dfrac{c+3}{4}n(n-1) + \dfrac{c-1}{4}[3(n-1)\cos^2\theta - 2n+2]$. Curbura scalară devine $\tau = \dfrac{1}{2}(n^2x^2 - y^2 + b)$.

Să găsim extremele curburii scalare τ, cu legătura $x^2 + y^2 \leq 1$.

Trecem în coordonatele polare $x = \cos\phi$ şi $y = \sin\phi$ şi obţinem

$$\begin{aligned}\tau(\cos\phi, \sin\phi) &= \frac{1}{2}(n^2\cos^2\phi - \sin^2\phi + b) = \frac{1}{2}(n^2\cos^2\phi - 1 + \cos^2\phi + b)\\ &= \frac{1}{2}[(n^2+1)\cos^2\phi + b - 1)]\\ &= \frac{(n^2+1)}{4}\cos 2\phi + \frac{b-1}{2} - \frac{(n^2+1)}{4}.\end{aligned}$$

Dar cum, $-1 \leq \cos 2\phi \leq 1$, găsim

$$-\frac{(n^2+1)}{2} + \frac{b-1}{2} \leq \tau(\cos\phi, \sin\phi) \leq \frac{b-1}{2}$$

În concluzie, valorile de extrem pe cercul $x^2 + y^2 = 1$, sunt

$$\tau_{\min} = -\frac{(n^2+1)}{2} + \frac{b-1}{2}$$

şi

$$\tau_{\max} = \frac{b-1}{2}.$$

Punctul critic (0,0) este punct şa.

Teorema 4. *Extremele globale ale curburii scalare* τ *restricţionate la* $\|H\|^2 + \|h\|^2 \leq 1$ *sunt* $\tau_{\min} = -\frac{(n^2+1)}{2} + \frac{b-1}{2}$ şi $\tau_{\max} = \frac{b-1}{2}$, *unde*

$$b = \frac{c+3}{4}n(n-1) + \frac{c-1}{4}[3(n-1)\cos^2\theta - 2n + 2].$$

În cazul discuţiei după $\cos\theta$, avem

$$\cos^2\theta = \frac{4}{3(c-1)}\left[\frac{c-1}{2} + \frac{2\tau - n^2\|H\|^2 + \|h\|^2}{n-1} - \frac{n(c+3)}{4}\right],$$

iar cum $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$, găsim următorul rezultat:

Teorema 5. *Pe orice* θ*-subvarietate oblică cu* $\dim M = n > 1$*, are loc inegalitatea:*

$$\tau \leq \frac{n(n-1)(c+3)}{8} - \frac{(n-1)(c-1)}{4} - \frac{(\|h\|^2 - n^2\|H\|^2)}{2},$$

dacă $c < 1$ *şi*

$$\omega \leq \tau \leq \frac{1}{8} + \omega,$$

dacă $c > 1$, *unde*

$$\omega = \frac{n(n-1)(c+3)}{8} - \frac{(n-1)(c-1)}{4} - \frac{(\|h\|^2 - n^2\|H\|^2)}{2}.$$

Vom prezenta o reformulare a Lemei lui Chen, introducând o variantă mai tare.

Lema 6. *Fie* $n \geq 2$ *şi numerele reale* $a_1, a_2, ..., a_n, c$ *astfel încât* $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^2 \geq (n-1)(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 + c)$. *În aceste condiţii are loc inegalitatea* $2a_1a_2 \geq c$, *cu egalitate dacă şi numai dacă* $a_1 + a_2 = a_3 = ... = a_n$.

Demonstraţie. Condiţia din lemă se transcrie

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_ia_j \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + (n-1)c$$

sau

$$2\sum_{i<j} a_ia_j \geq (n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + (n-1)c.$$

Echivalent,

$$(n-1)(2a_1a_2 - c) \geq (n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\sum_{\substack{i<j \\ j>2}} a_ia_j + 2(n-2)a_1a_2,$$

sau

$$(n-1)(2a_1a_2 - c) \geq (n-2)(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2a_1a_2) - 2\sum_{\substack{i<j \\ j>2}} a_ia_j.$$

Retranscriem

$$(n-1)(2a_1a_2 - c) \geq (a_1 + a_2 - a_3)^2 + ... + (a_1 + a_2 - a_n)^2 + (n-3)\sum_{i=3}^{n} a_i^2 - 2\sum_{\substack{i<j \\ j>2}} a_ia_j.$$

Altfel scris

$$(n-1)(2a_1a_2 - c) \geq \sum_{k=3}^{n} (a_1 + a_2 - a_k)^2 + \sum_{3 \leq i<j \leq n}^{n} (a_i - a_j)^2.$$

Rezultă $2a_1a_2 \geq c$, cu egalitate doar pentru $a_1 + a_2 = a_3 = ... = a_n$.

Bibliografie

[1] D.E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Math. **509**, Springer, Berlin, 1976.

[2] B.Y. Chen, *Geometry of Submanifolds*, M. Dekker, New York, 1973.

[3] B.Y. Chen, *Geometry of Submanifolds and Its Applications*, Science Univ. of Tokyo, 1981.

[4] D. Cioroboiu, *B.Y. Chen inequalities for semi-slant submanifolds in Sasakian space forms*, I.J.M.S., no. **27** (2003), 1731-1738.

[5] D. Cioroboiu, A. Oiaga, *B.Y. Chen inequalities for slant submanifolds in Sasakian space forms*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **52** (2003), 367-381.

[6] K. Yano, S. Bochner, *Curvature and Betti Numbers*, Princeton University Press, 1953.

[7] I. Mihai, *Certain submanifolds of a Kaehler manifold*, Geometry and Topology of Submanifolds VII, World Scientific, Singapore, (1995), 186-188.

[8] T. Rapcsak, *On minimization of sums of heterogeneous quadratic functions on Stiefel manifolds*, From Local to global Optimization, Kluwer Academic Publishers, (2001), 277-290.

[9] C. Udrişte, *On the Riemannian curvature tensor*, Bull. Math. Soc. Sci. Math., **16** (64), nr. **4** (1974), 471-476.

[10] C. Udrişte, *Convex functions and optimization methods on Riemannian manifolds*, Mathematics and its Applications, **297**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994.

[11] C. Udrişte, *Geometric Dynamics, Mathematics and Its Applications*, **513**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000;

[12] C. Udrişte, M. Fukui, *On the ranks of curvature tensors in a Finsler manifold*, Symp. on Finsler Geom. at Yokosuka, Japan 1986.

[13] C.Udrişte, M. Fukui, *Properties of v-curvature tensors in Finsler manifolds*, Tensor N.S., vol. **46** (1987), 52-57.

[14] K. Yano, M. Kon, *CR-Submanifolds of Kaehlerian and Sasakian Manifolds*, Birkhäuser, Boston, 1983.

[15] K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific, Singapore, 1984.

Bibliografie

[1] M. Anastasiei, *A class of generalized Lagrange spaces*, Şt. Univ. Al. Ioan Cuza **42** (1996), 259-264.

[2] M. Anastasiei, *Locally conformal Kaehler structures on tangent manifold of a space form*, Libertas Math. **19** (1999), 71-76.

[3] M. Anastasiei, K. Buchner, R. Miron, R. Roşca, *New aspects of Lagrangian relativity*, Found. of Physics Letters **2** (1992), 141-171.

[4] K. Arslan, R. Ezentas, I. Mihai, C. Murathan, C. Ozgur, *Chen inequalities for submanifolds in l.c. almost cosymplectic manifolds*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **29** (2001), 231-242.

[5] K. Arslan, R. Ezentas, I. Mihai, C. Murathan, C. Ozgur, *Ricci curvature of submanifolds in l.c. almost cosymplectic manifolds*, în curs de apariţie.

[6] S. Bando, Y. Ohnita, *Minimal 2-spheres with constant curvature in* $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, J. Math. Soc. Japan **39** (1987), 474-487.

[7] A. Bejancu, *A survey on CR-submanifolds of Kaehlerian manifolds*, Global Diff. Geom. Global Analysis, Lectures Notes in Math., Springer, Berlin, **1156** (1985), 14-23.

[8] A. Bejancu, *Geometry of CR-Submanifolds*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, 1986.

[9] A. Bejancu, Papaghiuc N., *Semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold*, An. Ştiint. Al. I. Cuza, Univ. Iaşi **27** (1981), 163-170.

[10] A. Bejancu, N. Papaghiuc, *Almost semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. de la Roumanie **28** (1984), 13-30.

[11] D.E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Math. **509**, Springer, Berlin, 1976.

[12] D.E. Blair, B.Y. Chen, *On CR-submanifolds of Hermitian manifolds*, Israel J. Math. **34** (1979), 353-363.

[13] D.E. Blair, S.I. Goldberg, *Topology of almost contact manifolds*, J. Diff. Geom. **1** (1967), 347-354.

[14] J. Bolton, G.R. Jensen, M. Rigoli, L.M. Woodward, *On conformal minimal immersions of* $\mathbf{S}^2$ *in* $\mathbf{CP}^n$, Math. Ann. **279** (1988), 599-620.

[15] W.M. Boothby, H.C. Wang, *On contact manifolds*, Ann. of Math. **68** (1958), 721-734.

[16] V. Borelli, B.Y. Chen, J.M. Morvan, *Une caractérisation géométrique de la sphère de Whitney*, C.R. Acad. Sci. Paris **321** (1995), 1485-1490.

[17] F. Bowman, *Introduction to elliptic functions with applications*, John Willey & Sons, Inc., New York, 1997.

[18] T. Branson, *Conformally covariant equation of differential forms*, Comm. Partial Diff. Equations **7** (1982), 393-431.

[19] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, P.A. Griffiths, *Exterior differential systems*, Springer-Verlag New York, Heidelberg (1991).

[20] K. Buchner, R. Roşca, *Sasakian manifolds having the contact quasi concurrent property*, Rend. Circ. Mat. Palermo **32** (1983), 388-397.

[21] K. Buchner, D. Cioroboiu, A. Oiagă, R. Roşca, *On f-Kenmotsu manifolds of order 2*, Stud. Cerc. Şt. Univ. Bacău, Proc. 11-th Nat. Conf. Finsler Lagrange Hamilton Geom., Sect. Mat. **10** (2000), 53-73.

[22] A. Bucki, *Submanifolds of almost r-paracompact manifolds*, Tensor N.S. **40** (1984), 69-89.

[23] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez, *Semi-slant submanifolds of a Sasakian manifold*, Geometriae Dedicata, **78** (1999), 183-199.

[24] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez, *Slant submanifolds in Sasakian space forms*, Glasgow Math. J. **42** (2000), 125-138.

[25] E. Calabi, *Isometric embeddings of complex manifolds*, Ann. of Math. **58** (1953), 1-23.

[26] E. Calabi, *Metric Riemann surfaces*, Contributions to the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies **30** (1953), Princeton 77-85.

[27] E. Cartan, *Systèmes Différrentiels Extérieurs et Leurs Applications Géométriques*, Hermann, Paris, 1945.

[28] B.Y. Chen, *Geometry of Submanifolds*, M. Dekker, New York, 1973.

[29] B.Y. Chen, *Geometry of Submanifolds its Applications*, Science Univ. of Tokyo, 1981.

[30] B.Y. Chen, *CR-submanifolds of a Kaehler manifold, I, II,* J. Diff. Geometry **16** (1981), 305-322, 493-509.

[31] B.Y. Chen, *Total Mean Curvature Submanifolds of Finite type*, World Scientific, 1984.

[32] B.Y. Chen, *Geometry of Slant Submanifolds*, K.U. Leuven, 1990.

[33] B.Y. Chen, *Slant immersions*, Bull. Austral. Math. Soc. **41** (1990), 135-147.

[34] B.Y. Chen, *Some pinching classification theorems for minimal submanifolds*, Arch. Math. **60** (1993), 568-578.

[35] B.Y. Chen, *A Riemannian invariant for submanifolds in space forms its applications*, Geom. Topology of Submanifolds, World Scientific, Leuven, Brussel **VI** (1993), 58-81.

[36] B.Y. Chen *A Riemannian invariant its applications to submanifold theory*, Results in Mathematics **27** (1995), 17-26.

[37] B.Y. Chen, *A general inequality for submanifolds in complex-space-forms its applications*, Archiv. Math. **67** (1996), 519-528.

[38] B.Y. Chen, *Jacobi's elliptic functions Lagrangian immersions*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **126** (1996), 687-704.

[39] B.Y. Chen, *Mean curvature shape operator of isometric immersions in real-space-forms*, Glasgow Math. J. **38** (1996), 87-97.

[40] B.Y. Chen, *Strings of Riemannian invariants, inequalities, ideal immersions their applications*, 3-th Pacific Rim Geom. Conf., Seoul, Korea, (1996), 7-60, Internat. Press, Cambridge, MA, U.S.A.

[41] B.Y. Chen, *Special slant surfaces a basic inequality*, Results Math. **33** (1998), 65-78.

[42] B.Y. Chen, *Relations between Ricci curvature shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions*, Glasgow Math. J. **41** (1999), 33-41.

[43] B.Y. Chen, *Riemannian Submanifolds. Handbook of Differential Geometry*, North-Holl , Amsterdam, 2000.

[44] B.Y. Chen, *Some new obstructions to minimal Lagrangian isometric immersions*, Japan. J. Math. **26** (2000), 105-127.

[45] B.Y. Chen, *On Ricci curvature of isotropic Lagrangian submanifolds in complex space forms*, Archiv. Math. **74** (2000), 154-160.

[46] B.Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, *Totally real submanifolds of* $\mathbf{C}P^n$ *satisfying a basic equality*, Arch. Math. **63** (1994), 553-564.

[47] B.Y. Chen, J.M. Morvan, *Cohomologie des sous-variétés* $\alpha-$*obliques*, C.R. Acad. Sci. Paris **314** (1992), 931-934.

[48] B.Y. Chen, K. Ogiue, *On totally real submanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **193** (1974).

[49] B.Y. Chen, Y. Tazawa, *Slant surfaces of codimension two*, Ann. Fac. Sc. Toulouse **11** (1990),29-43.

[50] B.Y. Chen, Y. Tazawa, *Slant submanifolds in complex Euclidean spaces*, Tokyo J. Math. **14** (1991), 101-120.

[51] B.Y. Chen, L. Vrancken, *Existence and uniqueness theorem for slant immersions its applications*, Results in Math. **31** (1997), 28–39.

[52] S.S. Chern, *Pseudo-groupes continus infinis*, Colloques Internationaux du C.N.R.S., Strasbourg, 1953, 119-136.

[53] S.S. Chern, *Minimal Submanifolds in a Riemannian Manifold*, Univ. of Kansas, Lawrence, Kansas, 1968.

[54] S.S. Chern, J.G. Wolfson, *Minimal surfaces by moving frames*, Amer. J. Math. **105** (1983).

[55] D. Cioroboiu, *Submanifolds in Sasakian space forms*, Analele Universităţii Bucureşti Anul **L** , Nr. **2** (2001), 33-41.

[56] D. Cioroboiu, *Some inequalities for $k-$ Ricci curvature of certain submanifolds in Sasakian space forms*, Global Analysis, Differential Geometry Lie Algebras, Conference Applied Differential Geometry. General Relativity, BSG Proceedings **10**, Geometry Balkan Press (2004), 59-65.

[57] D. Cioroboiu, *Scalar curvature of C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Differential Geometry - Dynamical Systems, Vol.**4**, No.**1** (2002), 5-11.

[58] D. Cioroboiu, *C-totally real submanifolds of $\mathbf{R}^{2n+1}$ satisfying a certain inequality*, Balkan J. Geom. Appl. **7** No.**1** (2002), 55-62.

[59] D. Cioroboiu, *B.Y. Chen inequalities for bi-slant submanifolds in Sasakian space forms*, Demonstratio Mathematica no.**1** (2003), Vol. **36**, 179-187.

[60] D. Cioroboiu, *Shape operator A_H for C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Math. J. Toyama Univ. **26** (2003).

[61] D. Cioroboiu, *B.Y. Chen inequalities for semi-slant submanifolds in Sasakian space forms*, I.J.M.M.S., no. **27** (2003), 1731-1738.

[62] D. Cioroboiu, *Some inequalities for Ricci curvature of certain submanifolds in Sasakian space forms*, Acta Math. Academiae Paedagogicae Nyiregyháziensis Vol. **19**, No. **2** (2003), 233-243.

[63] D. Cioroboiu, A. Oiagă, *B.Y. Chen inequalities for slant submanifolds in Sasakian space forms*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **52** (2003), 367-381.

[64] V. Cruceanu, P. Fortuny, P.M. Gadea, *A survey on paracomplex geometry*, Rocky Mountains J. Math. **26** (1996), 83-115.

[65] D.K. Datta, *Exterior recurrent forms on manifolds*, Tensor N.S. **36** (1982), 115-120.

[66] F. Defever, I. Mihai, R. Roşca, *On almost para-Hermitian manifolds structured by a $\mathcal{T}$-parallel connection*, Saitama J. Math. **19** (2001), 1-12.

[67] F. Defever, I. Mihai, L. Verstraelen, *B.Y. Chen's inequality for C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, Boll.Un. Mat. Ital. **11** (1997), 365-374.

[68] F. Defever, I. Mihai, L. Verstraelen, *A class of C-totally real submanifolds in Sasakian space forms*, J. Australian Math. Soc. **64** (1998), 120-128.

[69] F. Defever, I. Mihai, L. Verstraelen, *B-Y Chen's inequalities for submanifolds in Sasakian space forms*, Boll. Un. Mat. Ital. **4** (2001), 521-529.

[70] F. Defever, R. Roşca, *On a class of even-dimensional manifolds structured by a T-parallel connection*, Tsukuba J. Math. **25** (2001), 359-369.

[71] J. Dieudonné, *Treatise on Analysis*, vol. **4**, Academic Press, New York, 1974.

[72] F. Dillen, L. Vrancken, *C-totally real submanifolds of Sasakian space forms*, J. Math. Pures Appl. **69** (1990), 85-93.

[73] J.H. Eschenburg, I.V. Guadalupe, R.A. Tribuzy, *The fundamental equations of minimal surfaces in* $\mathbf{CP}^2$, Math. Ann. **270** (1985), 571-578.

[74] F. Etayo, R. Roşca, *Framed (2m+3)-dimensional Riemannian manifolds endowed with a Kenmotsu almost contact 3-structure*, Libertas Math. **16** (1996), 91-103.

[75] F. Etayo, R. Roşca, *On Riemannian manifolds endowed with a $\mathcal{T}$-parallel almost contact 4-structure*, Publicationes Math. Debrecen **50** (1997), 57-68.

[76] T. Fujitani, *Complex-valued differential forms on normal contact Riemannian manifolds*, Tohoku Math. J. **18** (1966), 349-361.

[77] S.I. Goldberg, *On the topology of compact contact manifolds*, Tohoku Math. J. **20** (1968), 106-110.

[78] V.V. Goldberg, R. Roşca, *Almost conformal 2-cosymplectic pseudo-Sasakian manifolds*, Note Mat. **8** (1988), 123-140.

[79] J. Gray, *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math. **69** (1959), 421-450.

[80] M. Harada, *On the curvature of Sasakian manifolds*, Bull. Yamagata Univ. Nat. Sci. **7** (1969), 97-106.

[81] M. Harada, *On the minimal diameter of Sasakian manifolds*, Bull. Yamagata Univ. Nat. Sci. **7** (1970), 191-203.

[82] Y. Hatakeyama, Y. Ogawa, S. Tanno, *Some properties of manifolds with contact metric structures*, Tohoku Math. J. **15** (1963), 42-48.

[83] T. Ikawa, *On the lenght of second fundamental form of slant surfaces*, Tensor N.S. **52** (1993), 249-254.

[84] R. Iordănescu, *Les espaces à connexion affine constante attachées aux algèbres $A^p_{(m,n)}$*, Stud. Cerc. Mat. **18** (1966), 1543-1547.

[85] R. Iordănescu, *The geometrical Barbilian's work from a modern point of view*, BJGA **1** (1996), 31-36.

[86] E. Käehler, *Über eine bemerkenswerte Hermitische Metrik*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9** (1933), 173-186.

[87] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, vol. 1, 2*, Interscience, New York, 1963, 1969.

[88] M. Kon, *Invariant submanifolds of normal contact metric*, Kodai Math. Sem. Rep. 25 (1973), 330-336.

[89] P. Libermann, C.M. Marle, *Geometrie Symplectique. Bases Theoriques de la Mecanique*, tome **1**, U.E.R. Math. Paris VII (1986).

[90] A. Lichnerowicz, *Geometrie des Groupes de Transformations*, Dunod (1958).

[91] A. Lotta, *Slant submanifolds in contact geometry*, Bull. Math. Soc. Roumanie **39** (1996), 183-198.

[92] S. Maeda, Y. Ohnita, S. Udagawa, *On slant immersions into Käehler manifolds*, Kodai Math. J. **16** (1993), 205-219.

[93] K. Matsumoto, I. Mihai, A. Oiagă, *Shape operator A_H for slant submanifolds in complex space forms*, Bull. Yamagata Univ. **14** (2000), 169-177.

[94] K. Matsumoto, I. Mihai, R. Roşca, *A certain locally conformal almost cosymplectic manifold its submanifolds*, Tensor N.S. **51** (1992), 91-102.

[95] K. Matsumoto, I. Mihai, A. Oiagă, *Ricci curvature of submanifolds in complex space forms*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., în curs de apariţie.

[96] I. Mihai, *CR-submanifolds of a framed f-manifold*, Stud. Cerc. Mat. **36** (1983), 127-136.

[97] I. Mihai, *CR submanifolds of a framed $f-$manifold (in Romanian)*, Stud. Cerc. Mat. **36** (1983), 127-136.

[98] I. Mihai, *On generic submanifolds of a framed f-manifold*, Proc. Nat. Conf. Geom. Top., 153-158, Timişoara, 1984.

[99] I. Mihai, *Differential Geometry of (Pseudo-) Riemannian Manifolds Admitting Certain Endomorphisms of Tangent Bundles Their Submanifolds*, Doctoral Thesis, K.U. Leuven, 1993.

[100] I. Mihai, *Capitole Speciale de Geometria Varietăţilor Complexe*, Ed. Univ. Bucureşti, 1995.

[101] I. Mihai, *Certain submanifolds of a Kaehler manifold*, Geometry Topology of Submanifolds **VII**, World Scientific, Singapore, (1995), 186-188.

[102] I. Mihai, *Ricci curvature of submanifolds in Sasakian space forms*, J. Austral. Math. Soc. **72** (2002), 247-256.

[103] I. Mihai, L. Nicolescu, R. Roşca, *On exact* 2*-para Sasakian manifolds*, Rend. Circ. Mat. Palermo **48** (1999), 223-236.

[104] I. Mihai, A. Oiagă, R. Roşca, *Lorentzian Kenmotsu manifolds having two skew symmetric conformal vector fields*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **42** (1999), 237-251.

[105] I. Mihai, A. Oiagă, R. Roşca, *On cosymplectic quasi-Sasakian manifold with quasi-Reeb vector field*, Publicationes Math. Debrecen **57** (2000), 475-485.

[106] I. Mihai, A. Oiagă, R. Roşca, *On a class of even dimensional manifolds structured by an affine connection*, Internat. J. Math. Math. Sci. **29** (2002), 681-686.

[107] I. Mihai, R. Roşca, L. Verstraelen, *Some Aspects of the Differential Geometry of Vector Fields*, PADGE **2**, K.U. Leuven, K.U. Brussel, 1996.

[108] I. Mihai, R. Roşca, L. Verstraelen, *On a class of exact locally conformal cosymplectic manifolds*, Internat. J. Math. Math. Sci. **19** (1996), 267-278.

[109] I. Mihai, B. Rouxel, *Tensor product surfaces of Euclidean plane curves*, Results in Math. **27** (1995), 308-315.

[110] R. Miron, *The geometry of Myller configurations*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1966.

[111] R. Miron, *Geometrical theory of subbundle of a vector bundle*, Proc. 3-rd. Congress of Geom., Thessaloniki (1991), 297-304.

[112] R. Miron, *Geometry of vector subbundles in a vector bundle*, Tensor N.S. **53** (1993), 1-23.

[113] R. Miron, M. Anastasiei, *Invariant theory of surfaces in generalized Lagrange spaces*, Prog. Math. Varanassi **2** (1987), 59-74.

[114] R. Miron, M. Anastasiei, *The Geometry of Lagrange Spaces: Theory Applications*, Kluwer Academic Publ., 1994.

[115] R. Miron, M. Anastasiei, *Generalized Finsler metrics*, Amer. Math. Soc. **196** (1996), 187-195.

[116] E.M. Moskal, *Contact manifolds of positive curvature*, Thesis-University of Illinois (1960).

[117] Al. Myller, *Directions concourrentes dans une variété métrique à n-dimensions*, Bull. Soc. Math. France **56** (1928), 1-6.

[118] A. Neuwler, L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957) 391-404.

[119] L. Nicolescu, *Les espaces de Riemann en répresentation subgéodesique*, Tensor N.S. **32** (1978), 183-187.

[120] L. Nicolescu, *Champs presque principaux dans l'algebre de déformation*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **4** (1981), 611-616.

[121] K. Ogiue, *On fiberings of almost contact manifolds*, Kodai Math. Sem. Rep. **17** (1965), 53-62.

[122] Y. Ohnita, *Minimal surfaces with constant curvature Käehler angle in complex space forms*, Tsukuba J. Math. **13** (1989), 191–207.

[123] A. Oiagă, *An estimate of scalar curvatures for certain submanifolds in complex space forms*, Proc. Conf. in honor of Professor Radu Rosca, Brussel, Leuven (Belgium) (1999), în curs de apariţie.

[124] A. Oiagă, *An inequality for totally real surfaces in complex space forms*, Proc. XI-th National Seminar on Finsler Lagrange Geometry, Bacău (2000), în curs de apariţie.

[125] A. Oiagă, *B.Y. Chen inequalities for slant submanifolds in generalized complex space forms*, Radovi Matematići **12** (2004), 215-231.

[126] A. Oiagă, *Ricci curvature of totally real submanifolds in locally conformal Kaehler space forms*, Analele Univ. Bucureşti **49** (2000), 69-76.

[127] A. Oiagă, I. Mihai, *B.Y. Chen inequalities for slant submanifolds in complex space forms*, Demonstratio Math. **32** (1999), 835-846.

[128] M. Okumura, *On infinitesimal conformal projective transformations of normal contact spaces*, Tohoku Math. J. **14** (1962), 398-412.

[129] M. Okumura, *Some remarks on space with a certain contact structure*, Tohoku Math. J. **14** (1962), 135-145.

[130] M. Okumura, *On contact metric immersion*, Kodai Math. Sem. Rep. **20** (1968), 239-409.

[131] Z. Olszak, R. Roşca, *Normally locally conformal almost cosymplectic manifolds*, Publications Math. Debrecen **39** (1985), 315-323.

[132] V. Oproiu, *Varietăţi diferenţiale finit şi infinit dimensionale*, Ed. Tehnică Buc. (1974).

[133] V. Oproiu, *A Kähler structure on the tangent bundle of a space form*, Int. J. Math. Math. Sci. **25** (2001), no. 3, 183-195.

[134] V. Oproiu, *Geometrie diferenţială*, Ed. Universităţii Al. Ioan Cuza (2002).

[135] V. Oproiu, *Some classes of natural almost Hermitian structures on the tangent bundles*, Publ. Math. **62** (2003), no. 3-4, 561-576.

[136] R. Osserman, *Curvature in the eighties*, Amer. Math. Monthly **97** (1990), 731-756.

[137] N. Papaghiuc, *Some remarks on CR-submanifolds of a locally conformal Kaehler manifold with parallel Lee form*, Publ. Math. Debrecen **43** (1993), 337-341.

[138] N. Papaghiuc, *Semi-slant submanifolds of a Kaehlerian manifold*, An. Şt. Univ.Al.I. Cuza Iasi **40** (1994), 55-61.

[139] M. Petrovic, R. Roşca, L. Verstraelen, *Exterior concurrent vector fields on Riemannian manifolds*, Soochow J. Math. **15** (1989), 179-187.

[140] W.A. Poor, *Differential Geometric Structures*, Mc Graw Hill, 1981.

[141] T. Rapcsak, *On minimization of sums of heterogeneous quadratic functions on Stiefel manifolds*, From Local to global Optimization, Kluwer Academic Publishers, (2001), 277-290.

[142] E. Reyes, R. Roşca, *Self-orthogonal foliate conformal symplectic almost para-Hermitian manifolds*, Rend. Circ. Mat. Palermo **44** (1995), 147-161.

[143] R. Roşca, *Couple des champs vectoriels quasi recurrents réciproques*, C. R. Acad. Sci. Paris **282** (1976), 699-701.

[144] R. Roşca, *On parallel conformal connections*, Kodai Math. J. **2** (1979), 1-9.

[145] R. Roşca, *Exterior concurrent vector fields on a conformal cosymplectic manifold endowed with a Sasakian structure*, Libertas Math. (Univ. Arlington, Texas) **6** (1986), 167-174.

[146] R. Roşca, *On para-Sasakian manifolds*, Rend. Sem. Mat. Messina **1** (1991), 201-216.

[147] R. Roşca, *On exterior concurrent skew symmetric Killing vector field*, Rend. Sem. Mat. Messina **2** (1993), 131-145.

[148] R. Roşca, *On K-left invariant almost contact* 3*-structures*, Results Math. **27** (1995), 117-128.

[149] R. Roşca, *On exterior quasi concurrent on torse forming vector fields on a Riemmanian manifold*, preprint.

[150] B. Rouxel, *A-submanifolds in Euclidean space*, Kodai Math. J. **4** (1981), 181-188.

[151] S. Sasaki, *On differential manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I*, Tohoku Math. J. **12** (1960), 459-476.

[152] S. Sasaki, Y. Hatakeyama, *On differential manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II*, Tohoku Math. J. **13** (1961), 281-294.

[153] S. Sasaki, Y. Hatakeyama, *On differentiable manifolds with contact metric structures*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 249-271.

[154] J.A. Schouten, D. van Dantzing, *Üder unitäre Geometrie*, Math. Ann.**103** (1930), 319-346.

[155] S. Tachibana, *On contact structures on submanifolds of real complex manifolds*, Tohoku J. Math. **5** (1963), 123-130.

[156] S. Tachibana, *On harmonic tensors in compact Sasakian spaces*, Tohoku Math. J. **17** (1965), 271-284.

[157] S. Tachibana, W.N. Yu, *On Riemannian space admitting more thet one Sasakian structure*, Tohoku Math. J. **22** (1970), 536-540.

[158] S. Tanno, *The topology of contact Riemannian manifolds*, Illinois J. Math. **12** (1968), 700-717.

[159] S. Tanno, *Sasakian manifolds with constant ϕ-holomorphic sectional curvature*, Tohoku Math. J. **21** (1969), 501-507.

[160] S. Tanno, *Constancy of holomorphic sectional curvature in almost Hermitian manifold*, Kodai Math. J. Sem. Rep. **25** (1973) 190-201.

[161] S. Tanno, *Isometric immersions of Sasakian manifolds is spheres*, Kodai Math. Sem. Rep. 21 (1996), 448-458.

[162] Y. Tashiro, *On contact structures of hypersurfaces in almost complex manifolds I*, Tohoku Math. J. **15** (1963), 62-78.

[163] Y. Tazawa, *Construction of slant immersions*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **22** (1994), 153-166.

[164] Y. Tazawa, *Construction of slant immersions II*, Bull. Belg. Math. Soc. **1** (1994), 569-576.

[165] C. Udrişte, *Introducerea unor invarianţi diferenţiali intrinseci într-o varietate riemanniană*, St. Cerc. Mat. **21**, nr. **3** (1969), 509-514.

[166] C. Udrişte, *Structures presque coquaternioniques*, Bull. Math. Soc. Sci. Math., t.**13**(61),no. **4** (1969), 487-507.

[167] C. Udrişte, *Grupuri de mişcări şi direcţiile liniilor de curbură*, Bul. IPB, **32**, nr. **4**(1970), 29-34.

[168] C. Udrişte, *Almost coquaternion hypersurfaces*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **15**, nr. **9** (1970), 1545-1551.

[169] C. Udrişte, *On the Riemannian curvature tensor*, Bull. Math. Soc. Sci. Math., **16** (64), nr. **4** (1974), 471-476.

[170] C. Udrişte, *Coquaternion structures almost coquaternion structures*, Mathematica Balkanica, no. **4** (1974), 635-642.

[171] C. Udrişte, *Almost coquaternion metric structure on 3-dimensional manifolds*, Kodai Math. Sem.Rep. 26, no. **23** (1975), 318-326.

[172] C. Udrişte, *Independent vector fields on orientable hypersurfaces of* R^{n+1}, Simpozionul de Geometrie şi Analiză globală, Ed. Academiei (1976), 163-164.

[173] C. Udrişte, *Convex functions on Riemannian manifolds submanifolds*, Bul. Inst. Politehn. Bucureşti, Ser. Mec. **46/47** (1984/85), 8-15.

[174] C. Udrişte, *Convex hypersurfaces*, Analele Şt. Univ. Al. I. Cuza, Iaşi **32 (**1986), 85-87.

[175] C. Udrişte, *Extremum points of square lengths of some vector fields*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR, **30** (78), **4** (1986), 361-370.

[176] C. Udrişte, *Completeness of Finsler manifolds*, Publicationes Mathematicae Debrecen, **42**,no. **1-2** (1993), 45-50.

[177] C. Udrişte, *Convergence of minimization methods on Riemannian manifolds*, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. **55** (1993), no. **3**-**4**, 247-254.

[178] C. Udrişte, *Convex functions optimization methods on Riemannian manifolds*, Mathematics its Applications, **297**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994.

[179] C. Udrişte, *Optimization methods on Riemannian manifolds*, Algebras Groups Geom. **14** (1997), no. **4**, 339-358.

[180] C. Udrişte, *Geometric Dynamics,* Mathematics Its Applications, **513**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.

[181] C. Udrişte, O. Dogaru, I Ţevy, *Extrema with nonholonomic constraints*, Geometry Balkan Press, Bucharest (2002).

[182] C. Udrişte, M Fukui, *On the ranks of curvature tensors in a Finsler manifold*, Symp. on Finsler Geom. at Yokosuka, Japan 1986.

[183] C. Udrişte, M. Fukui, *Properties of v-curvature tensors in Finsler manifolds*, Tensor N.S., vol. **46** (1987), 52-57.

[184] C. Udrişte, Gh. Mocica, *Concerning Sasakian 3-structures on three-dimensional manifolds*, Bul. Inst. Politehn. Bucuresti Ser. Electrotehn. **39** (1977), no. **1**, 3-8.

[185] C. Udrişte, O. Şandru, C. Dumitrescu, A. Zlătescu, *Ţiţeica indicatrix figuratrix*, Global Analysis, Differential Geometry Lie Algebras , BSG Proceedings **2**, Geometry Balkan Pres (1998), 117-124.

[186] C. Udrişte, Gr. Tsagas, *Vector fields their applications*, Geometry Balkan Press, Bucharest (2002).

[187] F. Urbano, *CR-Submanifolds of Nearly-Kaehler Manifolds*, Doctoral Thesis, Granada, 1980.

[188] P. Verheyen, *Generic submanifolds of Sasakian manifolds*, Med. Wisk. Inst., K.U. Leuven **157** (1982).

[189] L. Verstraelen, L. Vrancken, *Pinching theorems for C-totally real submanifolds of Sasakian space forms*, J. Geom. **33** (1988), 172-184.

[190] G. Vrânceanu, *Surfaces de rotation dans* $\mathbf{E}^4$, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **22** (1977), 857-862.

[191] A. Weyl, *Sur la théorie des formes différentiables attachées à une variété analytique complexe*, Comm. Math. Helv. **20** (1947), 110-116.

[192] S. Yamaguchi, M. Kon, M. Miyahara, *A theorem on C-totally real minimal surface,* Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976), 276-280.

[193] J. Yang, *On slant surfaces with constant mean curvature in C^2*, J. Geom. **59** (1997), 184-201.

[194] K. Yano, *On torse-forming direction in Riemannian spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944), 340-345.

[195] K. Yano, S. Bochner, *Curvature and Betti Numbers*, Princeton University Press, 1953.

[196] K. Yano, S. Ishihara, *The f-structures induced on submanifolds of complex almost complex spaces*, Kodai Math. Sem. Rep. **18** (1966), 271-292.

[197] K. Yano, S. Ishihara, *Invariant submanifolds of an almost contact amnifold*, Kodai Math. Sem. Rep. **21** (1969), 350-364.

[198] K. Yano, M. Kon, *Anti-invariant Submanifolds*, M. Dekker, New York, 1976.

[199] K. Yano, M. Kon, *CR-Submanifolds of Kaehlerian Sasakian Manifolds*, Birkhäuser, Boston, 1983.

[200] K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific, Singapore, 1984.

Universitatea ”Politehnica” din Bucureşti
Catedra de Matematici I
Splaiul Independenţei 313
060042 Bucureşti, Romania
E-mail: tiabaprov@pcnet.ro